TEMPAT KEDUDUKAN PADA GEOMETRI ANALITIKA YANG LAMA DITINGGALKAN

Muhammad Danuri[*)]

Pendahuluan

Salah satu cabang geometri yang pendekatannya menggunakan aljabar adalah geometri analitika. Pada geometri analitika, suatu obyek geometri ditempatkan/diposisikan pada sauatu bidang koordinat. Karena pada geometri yang dibicarakan adalah geometri ruang (geometri dimensi tiga), maka pada pembicaraan geometri analitika juga ada dua kelompok yaitu geometri analitika datar dan geometri analitika ruang. Pada uraian ini penulis akan menguraikan masalah geometri analitika dasar dan khususnya yang membicarakan masalah tempat kedudukan.

Irisan kerucut dengan bidang datar merupakan inti pokok dari pembicaraan geometri analitika datar, yaitu yang irisannya berupa:

(a) lingkaran
(b) parabola
(c) ellips
(d) hiperbola

Bentuk irisan kerucut tergantung kedudukan bidang yang mengiris kerucut tersebut dengan sumbu atau garis pelukisnya. Tegak lurus sumbu, irisan berupa lingkaran. Sejajar garis pelukis, irisan berupa parabola. Membentuk sudut dengan sumbu kerucut lebih besar dari setengah sudut puncak, irisan berupa ellips. Sejajar dengan sumbu kerucut, irisan berupa hiperbola.

Tempat Kedudukan

Tempat kedudukan merupakan salah satu topik dari pembicaraan geometri analitika datar yang sangat penting. Mengapa? Dengan uraian tentang tempat kedudukan, siswa dilatih untuk berfikir secara analitis dan kritis. Siswa harus bisa merinci dari suatu permasalahan tempat kedudukan, misalnya mana yang diketahui, mana yang harus dicari atau yang ditanyakan, dan langkah-langkah apa saja yang mesti harus ditempuh. Kaitan antara yang diketahui dengan konsep-konsep geometri yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah. Ini semua adalah melatih siswa untuk berfikir secara analitis dan kritis.

Pada kurikulum 1975 SMA, Kurukulum 1984 SMA, kurkulum 1994 SMA dan kurikulum 2004 SMA (draf akhir) tidak lagi dimunculkan masalah tempat kedudukan ini. Sehingga siswa yang menggunakan kurikulum 1975 SMA sampai sekarang tidak akan mengenalnya. Kurikulum 1968 SMA, masih membicarakan masalah tempat kedudukan ini, demikian juga kurikulum SMA sebelum tahun 1968.

Pada dasarnya ada 2 cara untuk menyelesaikan tempat kedudukan ini yaitu:

(1) Cara langsung, dengan memisalkan titik yang dicari tempat kedududkannya dengan (x_o, y_o). kemudian dengan memanfaatkan definisi, atau telah diketahui, atau sifat-sifat dan konsep-konsep yang terkait sehingga diperoleh hubungan antara x_o dan y_o tersebut. Dengan menjalankan titik (x_o, y_o) diperoleh persamaan tempat kedudukan yang ditanyakan.

(2) Cara tak langsung, dengan menggunakan parameter. Untuk cara ini perlu diperhatikan bahwa:

- Jika ada 1 parameter, maka harus tersedia 2 persamaan yang ditemukan.
- Jika ada 2 parameter, maka harus tersedia 3 persamaan yang ditemukan.
- Jika ada n parameter, maka harus tersedia (n + 1) persamaan yang diketemukan.

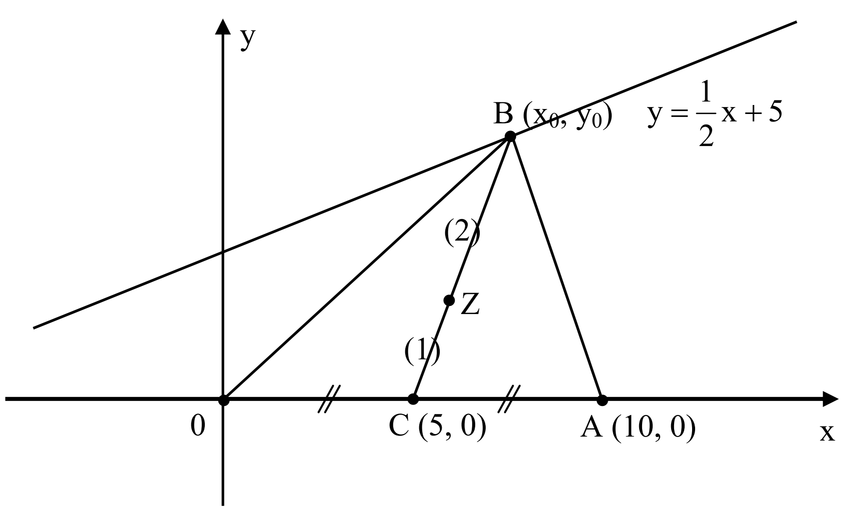
Dengan mengeleminir parameternya, maka terdapatlah persamaan tempat kedudukan yang harus dicari.

Contoh 1.

Diketahui segitiga OAB dengan (O(0, 0), A (10, 0) dan B terletak pada garis $y = \frac{1}{2}x + 5$.

Tentukan tempat kedudukan titik berat Z, jika titik B berjalan sepanjang garis $y = \frac{1}{2}x + 5$.

Penyelesaian



Karena Z adalah titik berat ΔOAB, maka BZ : ZC = 2 : 1 (Sifat titik berat)

Misalkan B (x_o, y_o). BC garis berat, sehingga C tengah-tengah OA, maka C (5, 0).

$$x_z = \frac{2.x_C + 1.x_B}{3}$$

$$x_z = \frac{2.5 + x_0}{3}$$

$3x_z = 10 + x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 3x_z - 10$ ……………………. (1)

$$y_z = \frac{2y_C + 1.y_B}{3}$$

$$y_z = \frac{2.0 + 1.y_0}{3}$$

$3y_z = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad y_0 = 3y_z$ ………………………… (2)

(x_0, y_0) pada garis $y = \frac{1}{2}x + 5$, maka dipenuhi

$y_0 = \frac{1}{2}x_0 + 5$ …………………………………………… (3)

Dari (1), (2) dan (3) didapat:

$$3y_z = \frac{1}{2}(3x_z - 10) + 5$$

$$\Leftrightarrow 3y_z = \frac{3}{2}x_z - 5 + 5$$

$$\Leftrightarrow 3y_z = \frac{3}{2}x_z$$

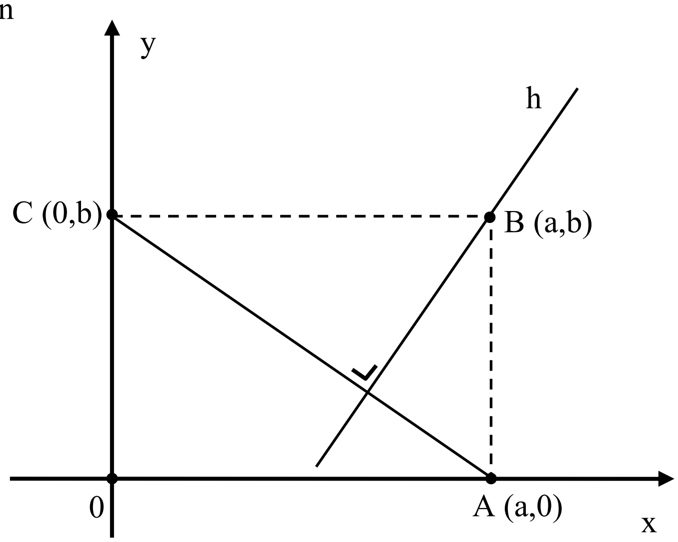
$\Leftrightarrow y_z = \frac{1}{2}x_z$ (hubungan antara x_2 dan y_z)

Sehingga persamaan tempat kedudukan titik z adalah garis $y = \frac{1}{2}x$

Contoh 2

Persegipanjang OABC, titik O (0, 0), titik A pada sumbu x dan titik C pada sumbu y sehingga kelilingnya tetap. Dibuat garis h melalui B dan tegak lurus diagonal AC. Tunjukkan bahwa tempat kedudukan garis h berupa kipas (bundel) garis, tentukan pula koordinat titik pokoknya, jika A bergerak sepanjang sumbu x dan C bergerak sepanjang sumbu y.

Penyelesaian



Karena kelilingnya tetap, sehingga 2a + 2b = k (konstan) atau $a + b = \frac{1}{2}k \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}k - a$ ….. (1)

Gradien AC = $-\frac{b}{a}$. Garis h $\perp$ AC, sehingga gradien garis h = $\frac{a}{b}$.

Persamaan garis h = $y - b = \frac{a}{b}(x - a)$, yaitu persamaan garis yang melalui B (a, b) dan gradien = $\frac{a}{b}$.

$h \equiv y - b = \frac{a}{b}(x - a)$

$b(y - b) = a(x - a)$ ………………………………………………………….. (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh:

$$\left(\frac{1}{2}k - a\right)\left(y - \left(\frac{1}{2}k - a\right)\right) = a(x - a)$$

$$\left(\frac{1}{2}k - a\right)\left(y - \frac{1}{2}k - a\right) = a(x - a)$$

$$\frac{1}{2}ky + \frac{1}{2}ka - \frac{1}{4}k^2 - ay - a^2 + \frac{1}{2}ka = ax - a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k(2y - k) + a(-y - x + k) = 0 \quad \text{……………………………………… (3)}$$

Karena k konstan dan a parameter (berubah-ubah) berjalan sepanjangsumbu x) maka persamaan (3) berupa berkas garis/bundul garis/kipas garis yang anggota pokoknya adalah garis $\frac{1}{2}k(2y - k) = 0$ dan

garis $-y - x + k = 0$ atau

$x + y - k = 0$

Titik pokoknya adalah:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{1}{2}k(2y - k) = 0 \\ x + y - k = 0 \end{array}\right|$$

$2y = k \iff y = \frac{1}{2}k$

$x + y - k = 0$

$\iff x + \frac{1}{2}k - k = 0$

$\iff x - \frac{1}{2}k = 0$

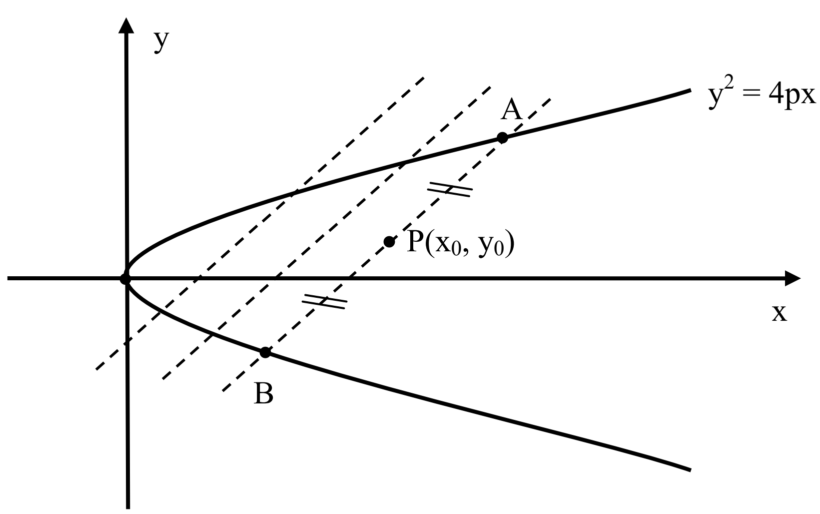
$\iff x = \frac{1}{2}k$

Jadi titik pokoknya adalah ($\frac{1}{2}k$, $\frac{1}{2}k$) atau (a + b, a + b).

Contoh 3

Diketahui parabola $y^2 = 4px$. Dibuat talibusur-talibusur yang sejajar dengan garis $y = mx + n$. tentukan persamaan tempat kedudukan tengah-tengah talibusur-talibusur tersebut.

Penyelesaian:



Persamaan tali busur yang sejajar dengan garis y = mx + a dapat dinyatakan dengan

$$\left.\begin{array}{l} y = mx + a \\ y^2 = 4px \end{array}\right| \text{dipotongkan}$$

$(mx + a)^2 = 4px$

$m^2x^2 + 2max + a^2 – 4px = 0$

$m^2x^2 + (2ma – 4p)x + a^2 = 0$ yang mempunyai akar-akar $x_1 = x_A$ dan $x_2 = x_B$.

$P(x_0, y_0)$ titik pertengahan AB.

$$x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{-(2ma - 4p)}{2m^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

y = mx + a, melalui titik $P(x_0, y_0)$ maka dipenuhi $y_0 = mx_0 + a$ …………………….. (2)

Dari (1) dan (2) dileliminir a, didapat:

$$x_0 = \frac{-2(ma - 2p)}{2m^2} = \frac{-(ma - 2p)}{m^2}$$

$m^2x_0 = - ma + 2p \quad \Leftrightarrow \quad ma = 2p – m^2x_0$

$$\Leftrightarrow \quad a = \frac{2p - m^2x_0}{m}$$

$y_0 = mx_0 + a$

$$y_0 = mx_0 + \frac{2p - m^2x_0}{m}$$

$$y_0 = \frac{m^2x_0 + 2p - m^2x_0}{m}$$

$y_0 = \dfrac{2p}{m}$, dijalankan diperoleh:

$y = \dfrac{2p}{m}$, persamaan tempat kedudukan pertengahan tali busur-talibusur yang sejajar dengan garis y = mx + n.

Kepustakaan:

Depdiknas. 2003, ***Kurikulum 2004 SMA, Standar Kompetensi Mata Pelajaran Matematika***. Jakarta : Depdiknas

Rawuh. dkk. (1962), ***Ilmu Ukur Analisitis Teori dan Soal-soal***, Bandung: Tarate.

Sri Widodo, ***Ilmu Ukur Analit untuk SMA***, Surakarta: SMA Negeri I.

*) Drs. Muh. Danuri, M.Pd.
Widyaiswara PPPG Matematika Yogyakarta