

PEMECAHAN PERMASALAHAN MATEMATIKA

Oleh : Drs. Marsudi Raharjo, M.Sc.Ed. (*Widyaiswara PPPG Matematika*)

Jawaban Masalah

Dari: Ernie

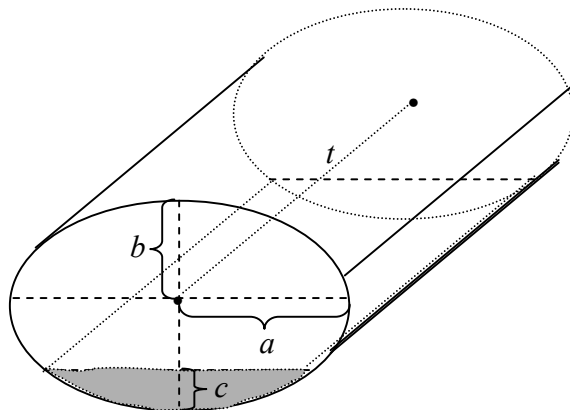
Guru SMP Isen Mulang, Palangkaraya (Alumnus Diklat SMP Swasta th 2000)

Faksimili Sekolah: 0536 – 21125, Faks. Koperasi Sekolah : 0536–27514

Telepon Rumah : 0536 – 39909

Pertanyaan difaks ke PPPG Mat no: 0274 – 885752, tanggal 6 Januari 2005.

Masalah: Ada truk tangki berbentuk ellips tidur

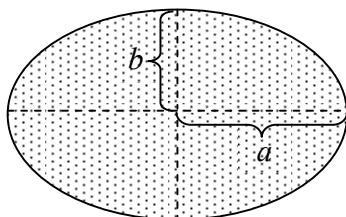


Berapa volume minyak dalam tangki
jika minyak setinggi c .

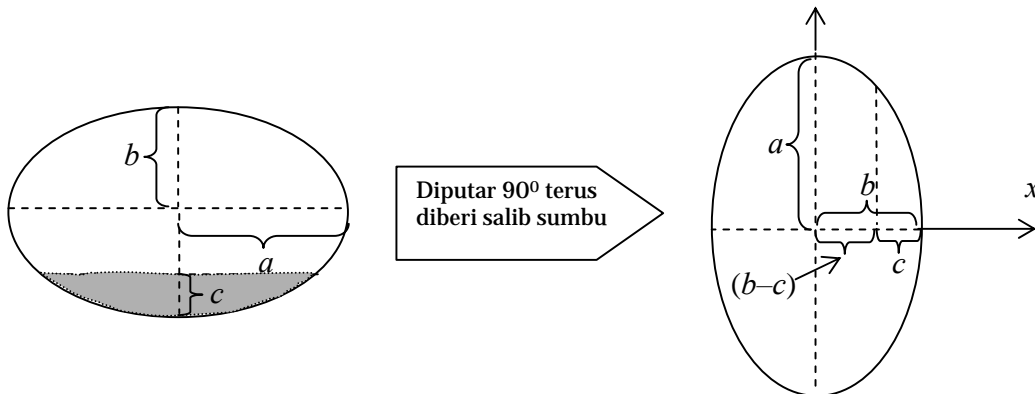
Jawab:

Bu Ernie, untuk mudahnya sebenarnya tangki dapat dibuat berdiri saja sehingga volumenya dapat dihitung dengan rumus $V = A \times t$, dengan A adalah luas alas dan t adalah tinggi ellips.

$$A = \pi a b$$



Luas Ellips = $\pi a b$
(Dihitung dengan integral)



Perhatikan bahwa persamaan ellips setelah diberi salib sumbu berdasarkan ukuran sumbu panjang dan sumbu pendeknya adalah:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ atau}$$

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = a^2 b^2,$$

sehingga kurva yang ada di atas sumbu X (ellips bagian atas) adalah

$$b^2 y^2 = a^2 b^2 - a^2 x^2 \text{ atau}$$

$$y^2 = \frac{a^2(b^2 - x^2)}{b^2} \text{ atau}$$

$$y = \pm a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{b}\right)^2}$$

Untuk mudahnya kita ambil nilai y yang positif seperti pada gambar berikut ini.

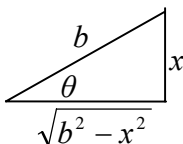


Jika luas yang diarsir L_1 , maka

$$L_1 = \int_{(b-c)}^b a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{b}\right)^2} dx,$$

bentuk integral di atas kita ubah menjadi bentuk integral fungsi trigonometri dengan memisalkan

$$\frac{x}{b} = \sin \theta.$$



Dari pemisalan itu akan diperoleh bentuk segitiga siku-siku dengan ukuran seperti gambar di samping.

Karena $x = b \sin \theta$, maka

$$dx = b \cos \theta d\theta$$

Karena $\sin \theta = \frac{x}{b}$ maka $\cos \theta = \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b}$

(lihat gambar)

Kita hitung dahulu integral tak tentu.

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \int a\sqrt{1-\sin^2\theta} \cdot b \cos\theta d\theta \\
 &= \int ab \cdot \cos\theta \cdot \cos\theta d\theta \\
 &= ab \int \cos^2\theta d\theta \\
 &= \frac{1}{2} ab \int (1 + \cos 2\theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} ab \left(\int d\theta + \int \cos 2\theta d\theta \right) \\
 &= \frac{1}{2} ab \left[\int d\theta + \int \cos 2\theta d\left(\frac{2\theta}{2}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} ab \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \\
 &= \frac{1}{2} ab \left(\theta + \frac{1}{2} \cdot 2 \sin\theta \cos\theta \right) \\
 &= \frac{1}{2} ab (\theta + \sin\theta \cos\theta)
 \end{aligned}$$

Mengingat rumus $\cos 2\theta = 2 \cos^2\theta - 1$,
maka

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

Ingat $\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$

karena $\frac{x}{b} = \sin\theta$ maka

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \frac{1}{2} ab \left[\arcsin\left(\frac{x}{b}\right) + \frac{x}{b} \cdot \frac{\sqrt{b^2-x^2}}{b} \right]_{b-c}^b \\
 &= \frac{1}{2} ab \left\{ \left(\arcsin\left(\frac{b}{b}\right) + \frac{b}{b} \cdot \frac{\sqrt{b^2-b^2}}{b} \right) - \left(\arcsin\left(\frac{b-c}{b}\right) + \frac{b-c}{b} \cdot \frac{\sqrt{b^2-b^2}}{b} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} ab \left\{ (\arcsin(1) + 0) - \left(\arcsin\left(\frac{b-c}{b}\right) + \frac{b-c}{b} \cdot \frac{\sqrt{b^2-b^2}}{b} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} ab \left\{ \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{b-c}{b}\right) - \left(\frac{b-c}{b} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{bc-c^2}}{b} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} ab \left\{ \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{b-c}{b}\right) - \frac{(b-c)\sqrt{c(2b-c)}}{b^2} \right\}.
 \end{aligned}$$

Karena luas permukaan air adalah $A = 2 \times L_1$, berarti

$$A = ab \left\{ \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{b-c}{b}\right) - \frac{(b-c)\sqrt{c(2b-c)}}{b^2} \right\}.$$

Karena volume minyak dalam tangki adalah

$V = A \times t$, maka kita peroleh rumus

$$A = abt \left\{ \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{b-c}{b}\right) - \frac{(b-c)\sqrt{c(2b-c)}}{b^2} \right\}.$$

Contoh

Jika tangki itu berukuran $a = 12$ dm, $b = 10$ dm, $t = 45$ dm, dan tinggi air $c = 5$ dm, maka volume minyak dalam tangki adalah

$$\begin{aligned} V &= 12 \times 10 \times 45 \times \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{2} - \frac{5\sqrt{5 \cdot 15}}{100} \right) \\ &= 5400 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} \sqrt{3} \right) \\ &= 5400 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{4} \sqrt{3} \right) \\ &\cong 5400 \left(\frac{3,14}{3} - \frac{1,73}{4} \right) \\ &= 5400(1,0466 - 0,4325) \\ &= 3316,14 \text{ dm}^3 \cong 3316 \text{ liter} \end{aligned}$$

