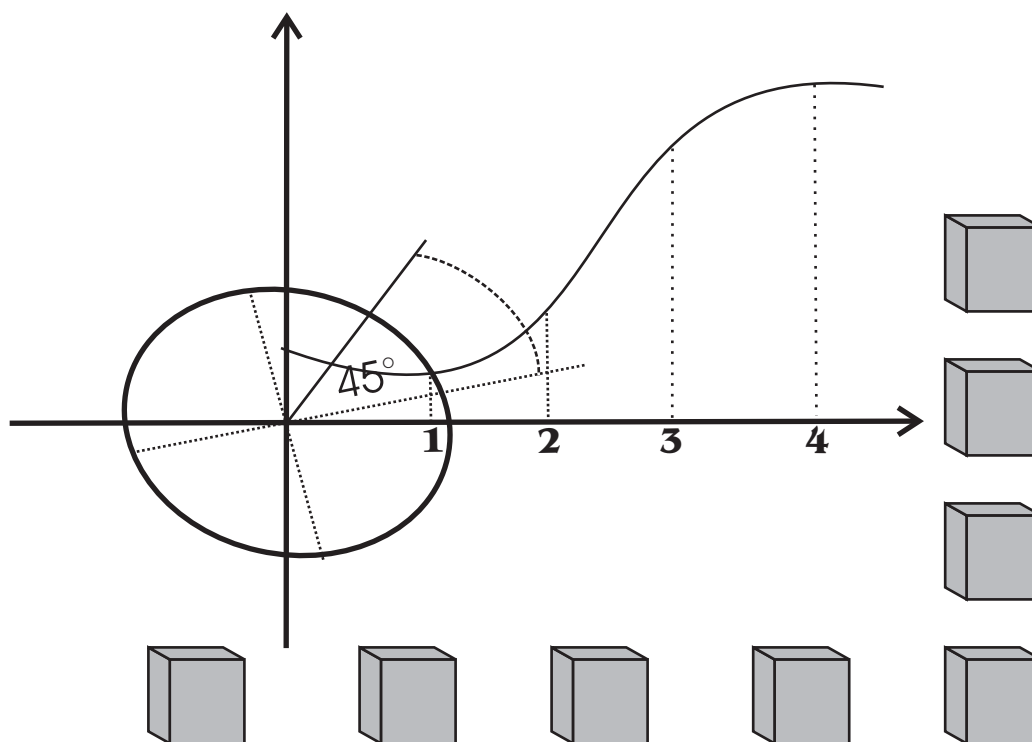


PAKET PEMBINAAN PENATARAN

Sumardiyono, S.Pd.

KARAKTERISTIK MATEMATIKA DAN IMPLIKASINYA TERHADAP PEMBELAJARAN MATEMATIKA



DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
PUSAT PENGEMBANGAN PENATARAN GURU MATEMATIKA
YOGYAKARTA 2004

Daftar Isi

Kata Pengantar	i
Daftar Isi	ii
Bab I Pendahuluan	1
A. Latar Belakang	1
B. Tujuan	2
C. Ruang Lingkup	2
D. Sasaran	2
E. Pedoman Penggunaan Paket	3
Bab II Apa Itu Matematika?	4
A. Matematika, Ilmu atau Bukan?	4
B. Matematika, Produk atau Proses?	5
C. Matematika Itu Apa?	8
Bab III Karakteristik Kultural, Filosofis, dan Deskripsi Matematika serta Implikasinya dalam Pembelajaran	9
A. Karakteristik Kultural Matematika	9
1. Sejarah Matematika	9
2. Evolusi Matematika	19
3. Ethnomatematika	22
B. Karakteristik Filosofis Matematika	24
1. Formalisme	24
2. Logikalisme atau Logisisme	25
3. Intuisiisme	25
C. Deskripsi Matematika	29
Bab IV Karakteristik Umum Matematika dan Implikasinya dalam Pembelajaran	31
A. Karakteristik Umum Matematika	31
1. Memiliki Objek Kajian yang Abstrak	31
2. Bertumpu pada Kesepakatan	39
3. Berpola Pikir Deduktif	40
4. Konsisten dalam Sistemnya	43
5. Memiliki Simbol yang Kosong dari Arti	44

6. Memperhatikan Semesta Pembicaraan	45
B. Karakteristik Matematika Sekolah	46
1. Penyajian	46
2. Pola pikir	47
3. Keterbatasan Semesta	48
4. Tingkat Keabstrakan	48
Bab V Penutup	49
A. Rangkuman	49
B. Tugas dan Latihan	50
Daftar Pustaka	54

BAB I

Pendahuluan

A. Latar Belakang

Perkembangan dunia pendidikan matematika dewasa ini tidak terlepas dari kaitan antara matematika sebagai “ilmu” dan didaktik atau psikologi pendidikan. Seperti yang kita ketahui, filsafat konstruktivisme telah diterima luas dalam dunia pendidikan, tak terkecuali pendidikan matematika. Pembelajaran kontekstual yang sekarang sedang digalakkan dan secara tersurat termaktub dalam Kurikulum 2004, tidak lain merupakan salah satu eksekusi dari diterimanya filsafat konstruktivisme dalam filsafat ilmu.

Di pihak lain, matematika sebagai ilmu sesungguhnya memiliki interpretasi yang demikian beragam. Oleh karena matematika yang diajarkan di sekolah juga merupakan bagian dari matematika, maka berbagai karakteristik dan interpretasi matematika dari berbagai sudut pandang juga memainkan peranan dalam pembelajaran matematika di sekolah. Dengan memahami karakter matematika, guru diharapkan dapat mengambil sikap yang tepat dalam pembelajaran matematika. Lebih jauh lagi, ia seharusnya memahami batasan sifat dari matematika yang dibelajarkan kepada anak didik. Jangan sampai guru memandang matematika hanya sebagai kumpulan rumus belaka, tidak pula hanya sebagai proses berpikir saja. Pemahaman yang komprehensif tentang matematika akan memungkinkan guru menyelenggarakan pembelajaran dengan lebih baik.

Banyak penelitian yang menunjukkan bahwa persepsi atau sikap guru terhadap matematika mempengaruhi persepsi atau sikapnya terhadap pembelajaran matematika. Untuk menyebut salah satunya, Hersh (dalam Sumaji,dkk, 1998: 246) menyatakan bahwa hasil pengamatan di kelas, menurut para peneliti, bagaimana matematika diajarkan di kelas dipengaruhi dengan kuat oleh pemahaman guru tentang sifat matematika.

Pemahaman yang tidak utuh terhadap matematika sering memunculkan sikap yang kurang tepat dalam pembelajaran, lebih parah lagi dapat memunculkan sikap negatif terhadap matematika. Dengan pemahaman yang utuh, diharapkan pembelajaran dapat menjadi lebih bermakna.

Dengan latar belakang di atas, kemunculan paket ini menjadi penting. Dengan mengambil tema karakteristik matematika dan implikasinya dalam proses pembelajaran, paket ini dapat menjadi alternatif rujukan untuk memahami matematika secara utuh walaupun garis besarnya saja dan memahami implikasinya dalam pembelajaran matematika yang bermakna.

B. Tujuan

Paket ini disusun dengan tujuan untuk membantu para pembaca yang ingin memahami tentang:

1. Karakteristik kultural dan karakteristik filosofis matematika serta implikasinya terhadap pembelajaran matematika.
2. Deskripsi tentang matematika serta implikasinya terhadap pembelajaran matematika.
3. Karakteristik umum matematika serta implikasinya terhadap pembelajaran matematika (karakteristik matematika sekolah).

C. Ruang Lingkup

Dalam paket ini hanya akan dibahas secara garis besar tentang karakteristik kultural dan karakteristik filosofis matematika. Deskripsi matematika juga dikemukakan beserta karakteristik umum matematika yang secara langsung berhubungan dengan proses pembelajaran. Pembahasan topik-topik di atas disertai dengan contoh dan implikasinya pada pembelajaran matematika.

D. Sasaran

Paket ini secara khusus ditujukan kepada para alumni penataran yang diselenggarakan oleh Pusat Pengembangan Penataran Guru (PPPG) Matematika. Walaupun begitu, paket ini dapat dan seyogyanya juga dibaca oleh guru sekolah umumnya, kalangan pendidik dan calon pendidik, bahkan mungkin pemerhati pendidikan matematika.

E. Pedoman Penggunaan Paket

Paket ini mengangkat isu tentang karakteristik matematika secara umum, akan tetapi fokus yang ingin dituju adalah pembelajaran yang berorientasi khususnya pada konstruktivisme. Oleh karena itu, bagi pembaca yang belum sepenuhnya memahami tentang filsafat konstruktivisme, hendaknya juga membaca literatur-literatur tentang konstruktivisme, utamanya konstruktivisme dalam pendidikan.

Penulis menyadari bahwa paket ini jauh dari keadaan sempurna sehingga jika ada di antara para pembaca paket ini yang mengalami kesulitan atau ingin memberikan kritik dan saran, sudilah kiranya menghubungi PPPG Matematika, Kotak Pos 31 YKBS Yogyakarta, atau mengirim email ke sumardyono41@yahoo.com.

BAB II

Apa Itu Matematika?

A. Matematika, Ilmu atau Bukan?

Kebanyakan ahli sepakat bahwa suatu pengetahuan disebut ilmu apabila lahir dari suatu kegiatan ilmiah. Kegiatan ilmiah bertumpu pada metode ilmiah, yang langkah-langkah utamanya membuat hipotesis, mengumpulkan data, melakukan percobaan (untuk menguji hipotesis), dan membuat kesimpulan. Apabila kita berketetapan suatu ilmu harus lahir dari metode ilmiah, maka matematika bukanlah ilmu.

Matematika merupakan buah pikir manusia yang kebenarannya bersifat umum (deduktif). Kebenarannya tidak bergantung pada metode ilmiah yang mengandung proses induktif. Kebenaran matematika pada dasarnya bersifat koheren. Seperti yang dikenal dalam dunia ilmu, terdapat tiga macam jenis kebenaran: (1) kebenaran koherensi atau konsistensi, yaitu kebenaran yang didasarkan pada kebenaran-kebenaran yang telah diterima sebelumnya, (2) kebenaran korelasional, yaitu kebenaran yang didasarkan pada “kecocokan” dengan realitas atau kenyataan yang ada, serta (3) kebenaran pragmatis, yaitu kebenaran yang didasarkan atas manfaat atau kegunaannya.

Contoh 1 (ilustrasi kebenaran matematika).

Pernyataan matematika $2 + 2 = 4$ (dalam sistem bilangan desimal). Pernyataan tersebut bernilai benar, bukan karena kita melakukan percobaan tetapi karena menurut pikiran logis kita: dua ditambah dua sudah pasti sama dengan empat! Andaikan kita memasukkan dua koin ke dalam kotak kosong, lalu memasukkan dua koin lagi ke dalamnya, maka siapapun akan merasa yakin ada empat koin di dalam kotak. Tapi bila ternyata setelah dipecah, ada tiga (atau lima) koin, yang salah bukan pada matematikanya, bukan?

Berdasarkan hal tersebut, beberapa ahli sangat hati-hati untuk tidak menggunakan istilah “ilmu matematika”. Walaupun demikian ada pula ahli yang “melenturkan”

pengertian “ilmu” dan sifat “ilmiah” pada pengetahuan yang telah diterima manusia dan sesuai dengan logika pikir manusia.

Walaupun matematika bukan produk metode ilmiah, tetapi kebenaran matematika bersifat universal (tentu dalam semesta yang dibicarakan). Keuniversalan kebenaran matematika menjadikannya lebih “tinggi” dari produk ilmiah yang mana pun juga; matematika menjadi ratunya ilmu sebab ia lebih penting dari logika (mengutip pendapat Bertrand Russel) dan menjadi pelayan ilmu sebab dengan matematika maka ilmu dapat berkembang jauh bahkan melebihi perkiraan manusia.

B. Matematika, Produk atau Proses?

Matematika itu produk. Ia adalah produk dari pemikiran intelektual manusia. Pemikiran intelektual itu bisa didorong dari persoalan pemikiran belaka maupun dari persoalan yang menyangkut kehidupan nyata sehari-hari.

Contoh 2 (SD,SMP,SMA) (contoh matematika sebagai produk)

Bilangan dapat dikatakan sebagai produk pemikiran manusia. Bilangan asli dipercaya muncul karena kebutuhan manusia untuk mengetahui jumlah hewan yang dimiliki manusia kuno. Sementara bilangan imajiner (bilangan khayal) muncul karena kebutuhan manusia untuk memberi arti pada penyelesaian suatu masalah yang murni bersifat pemikiran belaka (matematis). Contohnya, bilangan apakah yang menjadi penyelesaian: $x^2 + 1 = 0$. Contoh lain, bilangan prima, bilangan sempurna*, bilangan bersahabat** juga merupakan produk pemikiran belaka.

Contoh 3 (SMP, SMA) (contoh matematika sebagai produk)

Trigonometri, khususnya fungsi-fungsi trigonometri, merupakan produk usaha manusia dalam memahami keberadaan dan pergerakan bintang-bintang.

* Bilangan sempurna adalah bilangan asli yang jumlah faktor-faktornya selain dirinya merupakan bilangan itu sendiri. Contoh: $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$

** Bilangan-bilangan bersahabat adalah pasangan dua bilangan asli yang jumlah faktor-faktor bilangan yang satu (kecuali dirinya) sama dengan bilangan yang lain, dan sebaliknya. Contoh: 220 dan 284, 17296 dan 18416.

$$1.400 = 2(225) + b \rightarrow b = 1.400 - 450 = 950$$

Contoh 5 (SMP, SMA) (matematika sebagai proses)

Pandang persoalan berikut: Apakah $\sqrt{2}$ bilangan rasional? Atau apakah $\sqrt{2}$ dapat dinyatakan sebagai hasil bagi dua bilangan asli? Nah, hal yang penting bukan pada jawaban ya atau tidak, tetapi bagaimana proses untuk mendapatkan keyakinan jawaban ya atau tidak. Dalam matematika banyak kemungkinan cara yang dapat ditempuh, salah satunya dengan cara kontradiksi. Andaikan $\sqrt{2}$ adalah bilangan rasional. Jadi ada bilangan asli a dan b sehingga $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ dan $\frac{a}{b}$ adalah bentuk yang paling sederhana

(tidak memiliki faktor yang sama kecuali 1). Akibatnya $\frac{a^2}{b^2} = 2$ atau $a^2 = 2b^2$. Ini artinya bilangan a^2 adalah bilangan genap (sebab dua kali bilangan b^2). Karena a^2 genap maka pasti a juga genap. Jadi, dapat dimisalkan $a = 2k$ dengan k suatu bilangan asli. Kembali, $a^2 = 2b^2 \Leftrightarrow (2k)^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 2k^2 = b^2$. Nah, ini artinya b^2 adalah bilangan genap sehingga b adalah bilangan genap*. Karena a dan b genap, maka terdapat faktor persekutuan 2. Ini bertentangan dengan pengandaian semula. Karena itu, $\sqrt{2}$ pasti merupakan bilangan rasional.

Demikianlah, matematika dapat dipandang sebagai produk maupun sebagai proses berpikir, tergantung segi mana yang kita tekankan.

C. Matematika Itu Apa?

Dalam *The New Encyclopedia Britannica* dinyatakan terdapat 3 bagian besar matematika, yaitu (1) Sejarah dan Landasan Matematika, (2) Cabang-cabang Matematika yang terdiri dari 6 cabang besar, dan (3) Terapan-terapan Matematika yang terdiri dari 7 cabang besar (The Liang Gie, 1984: 75-58). Menurut Morris Klein

* Bila Anda belum yakin, pernyataan ini pun dapat dibuktikan dengan kontradiksi. Misalkan a ganjil, yaitu $a = 2k + 1$, untuk suatu bilangan asli k . Maka $a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2M + 1$ (suatu bilangan ganjil). Ini bertentangan dengan data bahwa a^2 genap.

(1894-1977) terdapat 80 cabang matematika (Dali S. Naga, 1980: -). Bahkan dewasa ini ada yang menyebut matematika telah berkembang menjadi 3400 subcabang (Sumaji, dkk, 1998: 226).

Dengan begitu banyak cabang matematika dan begitu luas lapangan garapnya, bagaimana kita dapat menggambarkan matematika secara sederhana? Jadi, bila kita harus menjawab pertanyaan: matematika itu apa, maka kita hanya bisa mendeskripsikan beberapa sifatnya saja. Dengan cara begini pula para ahli telah mendeskripsikan matematika, ada yang begitu sederhana ada yang cukup kompleks, tetapi tidak ada deskripsi yang menjadi suatu definisi formal matematika. Apa saja sifat-sifat matematika yang sering digunakan para ahli untuk mendeskripsikan matematika? Pada bab-bab selanjutnya kita mulai akan membahas tentang sifat atau karakteristik matematika tersebut beserta implikasinya pada pembelajaran matematika.

BAB III

Karakteristik Kultural, Karakteristik Filosofis, dan Deskripsi Matematika serta Implikasinya dalam Pembelajaran

A. Karakteristik Kultural Matematika

Obyek-obyek matematika bersifat sosial-kultural-historis, artinya bahwa matematika dan pembelajarannya merupakan milik bersama seluruh umat. Betapapun primitifnya suatu masyarakat, matematika adalah bagian dari kebudayaannya (meski dalam bentuk yang sederhana). Karena itu matematika bersifat universal. Matematika itu sendiri lahir dari perjalanan panjang yang menyejarah dalam kehidupan manusia.

Dalam membicarakan aspek kultural matematika, penulis akan membahasnya ke dalam tiga tema, yaitu sejarah matematika, evolusi matematika, dan etnomatematika. Masing-masing tema itu berhubungan dengan karakteristik kultural serta mempunyai pengaruh terhadap pembelajaran matematika.

1. Sejarah Matematika

Matematika seperti juga aspek kehidupan manusia lainnya, memiliki sisi yang tidak terpisahkan yaitu sejarah. Sejarah matematika terbentang dari sekitar 4000 SM hingga kini serta memuat sumbangan dari ribuan tokoh matematika. Sejarah matematika menampilkan bagian matematika yang berkaitan dengan *perkembangan* matematika hingga menemukan bentuknya dewasa ini, yang terekam dalam kebudayaan besar: Mesopotamia, Mesir Kuno, Yunani Kuno, India Kuno, China Kuno, Arab Kuno, Persia, dan Eropa Kuno, serta zaman modern yang sebagian besar terpusat di Eropa.

Sejarah matematika termasuk bagian dari matematika. Sejarah matematika tidak saja ada karena keberadaanya merupakan suatu keniscayaan, tetapi ia juga penting karena dapat memberi pengaruh kepada perkembangan matematika dan pembelajaran matematika.

Melihat bahwa matematika itu “diciptakan” oleh manusia terdahulu, maka ini memberi ilham bagi paradigma pembelajaran yang bersifat konstruktivisme. Ini yang menurut penulis implikasi atau peran penting sejarah matematika dalam pembelajaran. Siswa diperbolehkan menggunakan usahanya sendiri dalam

menyelesaikan suatu masalah matematika (atau yang bernuansa matematika) bahkan dengan menggunakan bahasa dan lambangnya sendiri. Paradigma semacam ini kini menjadi *trend* dalam pembelajaran matematika realistik atau konstruktivis. Perkembangan matematika dalam diri individu (*ontogeny*) mungkin saja mengikuti cara yang sama dengan perkembangan matematika itu sendiri (*phylogeny*).

Contoh 6 (SD) (pembelajaran yang realistik/konstruktivis)

Contoh berikut ini mungkin belum sepenuhnya dapat menggambarkan keseluruhan ciri dari pembelajaran realistik, paling tidak sifat konstruktivis ada di dalamnya.

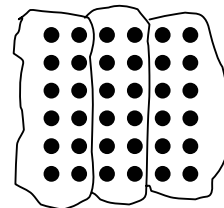
Pemahaman pembagian sebagai distribusi sesungguhnya tidak membutuhkan “ceramah” dari guru, karena siswa memiliki potensi untuk ”menemukan” konsep tersebut. Lalu, daripada langsung menyuguhkan lambang formal semacam $36 : 3$, guru dapat menggunakan soal yang kontekstual, seperti di bawah ini.

Tiga anak akan membagi 36 permen sama rata. Berapa permen yang akan diperoleh oleh masing-masing anak?

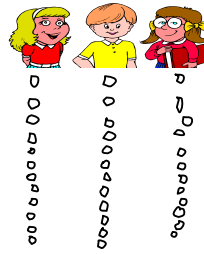
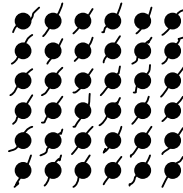


Siswa mungkin akan menemukan salah satu dari model atau prosedur penyelesaian berikut ini: (ini disebut *model emergent*, model yang muncul dari pikiran siswa).

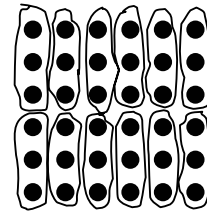
- Membagi dengan dasar geometris, yaitu dengan membagi susunan permen menjadi tiga daerah bagian yang sama.



- Mendistribusi satu demi satu. Mungkin dengan menyilang permen yang telah didistribusi ke salah satu anak.



- Mengelompokkan tiga-tiga. Mungkin dengan pertimbangan setiap kali permen didistribusi, akan terdistribusi ke tiga orang anak.



- Dan masih banyak lagi strategi atau model yang mungkin muncul dalam menyelesaikan soal tersebut.

Model atau strategi penyelesaian tersebut di atas secara implisit memuat ide tentang pengurangan berulang (*repeated subtraction*) maupun bagi adil (*fair sharing*), bahkan ide tentang kebalikan perkalian (*invers of multiplication*). Tugas guru adalah memfasilitasi siswa untuk sampai pada ide-ide tersebut sebelum benar-benar menyatakannya sebagai kalimat matematika formal (penggunaan simbol dan konsep/prinsip matematika).

Selain ide tentang *reinvention* atau *guided reinvention* tersebut, fungsi sejarah matematika meliputi tiga dimensi berbeda: (1) sebagai materi pembelajaran/kuliah, (2) sebagai konteks materi pembelajaran, (3) sebagai sumber strategi pembelajaran. (Fauvel, 2000). Kecuali bagian pertama, fungsi sejarah matematika itu memberikan implikasi positif bagi pembelajaran matematika di sekolah. Lebih lanjut Van Ameron (1999: 7) menyatakan:

Teacher may find that information on the development of a mathematical topic makes it easier to tell, explain or give an example to students. It also helps to sustain the teacher's interest in mathematics. And history of mathematics can give the educational developer or researcher more insight into the subject matter and perhaps even the learning process.

Menurut Fauvel lagi, manfaat penggunaan sejarah dalam pembelajaran matematika meliputi tiga hal: (1) *Understanding*, yaitu bahwa dengan mengikuti

jalan perkembangan suatu konsep matematika maka siswa akan lebih memahami konsep tersebut, (2) *Enthusiasm*, yaitu penggunaan sejarah matematika dapat meningkatkan motivasi, kesenangan (*enjoy*), dan kepercayaan diri dalam belajar matematika, serta (3) *Skills*, yaitu dengan menelaah suatu tema dalam sejarah matematika maka siswa diajak untuk belajar keterampilan meneliti, selain (tentu saja) keterampilan matematika itu sendiri.

Beberapa contoh sejarah matematika berikut dapat digunakan dalam pembelajaran matematika di sekolah. Sumber sejarahnya dikutip dari buku Carl B. Boyer, buku Howard Eves, serta halaman Web karya O'Connor, J. J. & Robertson, E. F. (lihat Daftar Pustaka).

Contoh 7 (sebagai konteks - pengantar pembelajaran)

a. Biografi Euler (1707-1783) (SD, SMP, atau SMA)

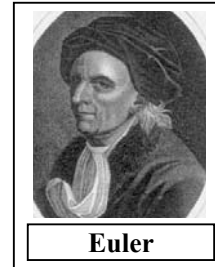
Leonhard Euler, tokoh matematika yang dominan dari abad kedelapan belas dan pengarang matematika yang paling subur sepanjang masa. Lahir dekat Basel, Swiss, ia telah menerbitkan makalah-makalah pada usia 18 tahun. Ia menjabat di Universitas Basel, St. Petersburg Academy of Science. Pada waktu ia meninggal, disebutkan bahwa semua matematikawan Eropa adalah muridnya.

Euler memulai karya lewat publikasi dan beberapa artikel dalam bukunya "*Mechanica*" (1736 – 1737). Pada tahun 1741, di Berlin ia telah menulis lebih dari 200 artikel, 3 buku tentang analisis matematika, serta publikasi ilmiah populer "*Letters to a Princess of Germany*" (3 volume, 1768-1772).

Minat Euler terentang di semua matematika dan fisika. Ia memperkenalkan e sebagai bilangan dasar untuk logaritma asli/natural pada tahun 1727, memperkenalkan bahwa e dan e^2 adalah takrasional (irasional), memperkenalkan i untuk akar kuadrat dari -1 tahun 1777, lambang π , lambang Σ (1755) dan menemukan hubungan luar biasa $e^{i\pi} + 1 = 0$. Euler juga memperkenalkan " $f(x)$ " pada tahun 1734, memperkenalkan fungsi Beta dan Gamma, serta faktor integrasi untuk persamaan diferensial.

Kebutaan selama 17 tahun terakhir dari hidupnya dimulai pada usia 31 tahun, nampaknya tidak menghambat karirnya. Sebagian, disebabkan oleh daya ingatnya yang luar biasa; ia mengetahui dalam hati rumus-rumus trigonometri dan analisis, ditambah banyak puisi. Dikatakan bahwa ia telah mengerjakan suatu perhitungan sampai 50 tempat desimal di dalam kepalanya. Sampai usia 48, tokoh matematika ini telah menghasilkan 886 buku dan artikel.

Euler adalah seorang yang sangat baik hati dan guru teladan. Ketika mengetahui seorang muridnya, Lagrange, bisa menemukan sebuah teori matematika (yang sebenarnya telah ia temukan), ia menahan diri agar muridnya yang mempublikasikan lebih dulu. Ia juga pencinta keluarga, yang seringkali menghabiskan waktu sore harinya dengan membangun permainan-permainan ilmiah dan membaca kitab suci untuk 13 putra-putrinya. Ia seorang manusia yang mengagumkan.



Kisah biografi di atas, dapat menimbulkan kegairahan kepada matematika serta menumbuhkan mental yang baik. Tentu saja ada bagian yang semestinya tidak perlu

ditampilkan untuk siswa SD, dan bila perlu menggunakan bahasa yang kontekstual dengan dunia seumur siswa.

b. Sejarah determinan (SMA)

Sejarah tentang determinan berikut ini dapat menjadi pengantar pembelajaran.

Perkembangan konsep determinan muncul lebih dulu baru konsep matriks. Ini dikarenakan konsep determinan terkait dengan penyelesaian sistem persamaan (juga penyelesaian persamaan aljabar (polinom/suku banyak) pangkat tinggi).

Ide determinan muncul pertama kali di Jepang dan di Eropa pada waktu hampir bersamaan, tetapi Seki Kowa mempublikasikan lebih dulu di Jepang. Tahun 1683, Seki menulis buku *Method of Solving the dissimulated problems* yang memuat metode matriks. Tanpa menggunakan istilah apa pun untuk “determinan”, ia memperkenalkan determinan dan memberikan metode umum untuk menghitungnya. Seki menemukan determinan untuk matriks ordo 2×2 , 3×3 , 4×4 , dan 5×5 dan menggunakannya untuk menyelesaikan persamaan pangkat tinggi, bukan sistem persamaan.

Leibniz dalam suratnya ke l'Hôpital tahun 1683 menjelaskan sistem persamaan:

$$10 + 11x + 12y = 0$$

$$20 + 21x + 22y = 0$$

$$30 + 31x + 32y = 0$$

hanya memiliki satu penyelesaian karena $10 \cdot 21 \cdot 32 + 11 \cdot 22 \cdot 30 + 12 \cdot 20 \cdot 31 = 10 \cdot 22 \cdot 31 + 11 \cdot 20 \cdot 32 + 12 \cdot 21 \cdot 30$ yang tidak lain merupakan syarat determinan koefisien sama dengan nol. Tetapi Leibniz tidak bermaksud menggunakan bilangan, sehingga apa yang ia nyatakan dengan 21 adalah a_{21} . Leibniz menggunakan istilah “resultant” untuk kombinasi hasil kali koefisien dari determinan tsb.

Tahun 1730-an, Maclaurin menulis *Treatise of algebra* dan baru diterbitkan tahun 1748. Buku tsb memuat pembuktian Aturan Cramer untuk matriks 2×2 dan 3×3 . Baru pada tahun 1750, Cramer lewat buku *Introduction to the analysis of algebraic curve* memberikan aturan umum untuk aturan Cramer pada matriks $n \times n$ (karena itu disebut Aturan Cramer) walaupun tidak ada bukti yang diberikan. Tahun 1764, Bezout memberikan sebuah metode menghitung determinan, begitu juga Vandermonde pada tahun 1771. Tahun 1772, Laplace mengembangkan aturan yang kini disebut ekspansi Laplace dan ia menamakan determinan dengan sebutan “resultant”, seperti sebutan Leibniz.

Istilah “determinant” pertama kali digunakan oleh Gauss dalam *Disquisitiones arithmeticae* (1801), tetapi dalam pembahasan bentuk-bentuk kuadrat dengan menggunakan determinan. Eliminasi Gauss, yang ditelah digunakan di Cina tahun 200 SM, ditemukan pada karyanya tentang studi orbit asteroid Pallas. Adalah Cauchy pada tahun 1812, yang pertama kali menggunakan istilah “determinant” dalam konteks modern. Karya-karya Cauchy hampir mewakili konsep determinan modern. Dia merintis konsep “minor” dan “adjoints”, serta hasil kali matriks. Dalam karya tahun 1841, ia menggunakan tanda dua garis vertikal untuk menunjukkan determinan.

Contoh 8 (sebagai konteks - contoh dari sejarah matematika)

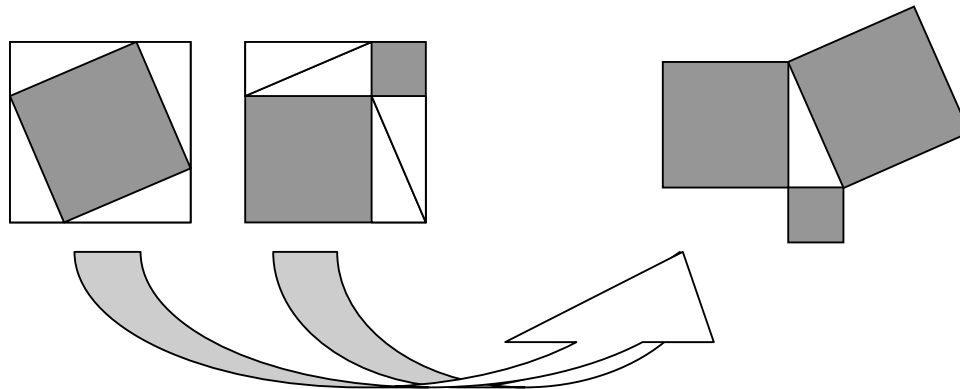
a. Bilangan Negatif dan Bilangan Positif di Cina Kuno (SD)

Di Cina, penggunaan bilangan positif ditandai dengan batang (atau gambar batang) merah, sedang bilangan negatif dengan batang hitam. Mungkin ini telah dikenal ribuan tahun yang lalu, dan kita dapat melihatnya pada *Jianzhang Suanshu* (antara 206 SM-220 M).

Apa yang digunakan oleh orang Cina Kuno tersebut dapat digunakan dalam pembelajaran untuk menunjukkan bilangan bulat (bulat positif, nol, dan bulat negatif). Ilustrasi dari Cina Kuno dapat digunakan untuk menunjukkan sifat negatif sebagai hutang dan sifat positif sebagai piutang (atau mempunyai).

b. Bukti Teorema Pythagoras dari Sekolah Pythagoras (SMP, SMA)

Sebuah sekolah yang didirikan oleh Pythagoras (580 SM - 520 SM) mengenal pembuktian teorema yang dikenal sebagai Teorema Pythagoras, seperti berikut ini.

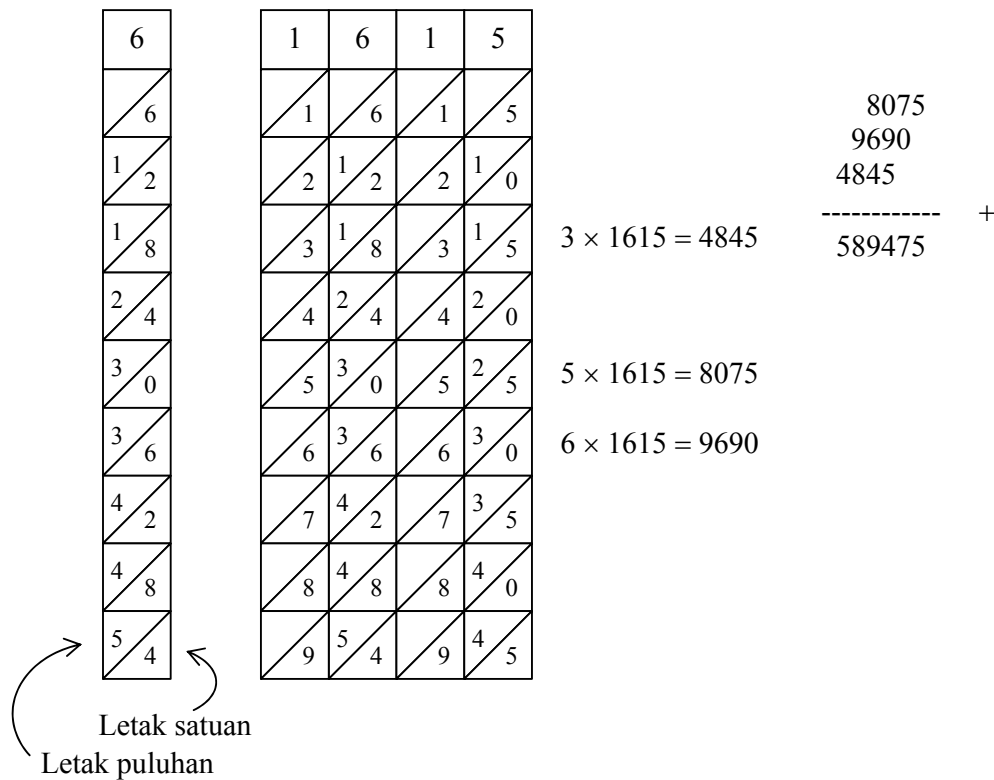


Bukti tersebut di atas dapat dipergunakan dalam pembelajaran tentang Teorema Pythagoras di SMP (maupun di SMA).

Contoh 9 (sebagai sumber strategi)

a. Batang Napier dalam pembelajaran aturan perkalian (SD)

John Napier (1550-1617) dalam bukunya *Rabdologiae* yang diterbitkan tahun 1617 menyuguhkan sebuah alat melakukan perkalian yang disebut Batang Napier (*Napier Bones* atau *Napier Rods*) dan menjadi terkenal pada jamannya. Alat tersebut menggunakan prinsip perkalian desimal, yang telah dikenal di Arab melalui apa yang disebut *lattice diagram*.



Sebuah batang Napier terdiri atas 10 kotak, dengan kotak teratas menunjukkan sebuah bilangan dasar (digit) dan kotak selanjutnya berturut-turut merupakan hasil perkalian bilangan dasar tersebut dengan bilangan 1 hingga 9 di mana satuan diletakkan di bagian bawah diagonal sedang bagian puluhan diletakkan di bagian atas diagonal. Di atas ditunjukkan contoh untuk batang 6.

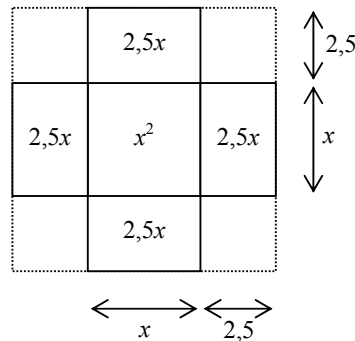
Di atas juga ditunjukkan bagaimana melakukan perkalian dengan mengambil contoh 1615 dikalikan 365 (contoh dalam buku *Rabdologiae*). Susun Batang Napier 1, 6, 1, dan 5 seperti di atas, perhatikan bahwa hasil 3×1615 ditunjukkan oleh bilangan dalam tiap daerah diagonal, yaitu 4 (dari $3 + 1$), 8 (dari $8 + 0$), 4 (dari $3 + 1$), dan 5 (dari 5 saja) sehingga hasilnya 4845. Demikian pula untuk hasil perkalian $5(1615)$ dan $6(1615)$. Ketiga hasil dijumlahkan sesuai urutan posisi bilangan pengali.

b. Diagram al-Khwarizmi dalam pembelajaran Persamaan Kuadrat (SMA)

Al-Khwarizmi (sekitar 780-850 M) dalam bukunya *Aljabr wal Muqabala* menyuguhkan cara mendapatkan penyelesaian suatu bentuk persamaan kuadrat secara geometris. Cara ini menggunakan metode *melengkapkan kuadrat* seperti yang

dikenal di SMA. Diagram al-Khwarizmi ini dapat dijadikan sumber pembelajaran tentang metode melengkapkan kuadrat.

Contohnya $x^2 + 10x - 39 = 0$ yang ditulis sebagai $x^2 + 10x = 39$ (contoh dari buku al-Khwarizmi). Bagian x^2 diwakili oleh sebuah persegi, sementara bagian $10x$ dipecah menjadi 4 bagian yang masing-masing mewakili $2,5x$.



Mudah dipahami bahwa untuk menjadi bentuk persegi (secara aljabar, berarti kuadrat sempurna), maka perlu ditambah 4 buah daerah persegi kecil, yang luasnya $4 \times (2,5)^2 = 25$. Ini berarti persegi besar tersebut bernilai $39 + 25 = 64$. Dengan demikian panjang sisinya 8. Dari diagram dapat dilihat bahwa panjang sisi $5 + x$. Dengan demikian $x = 3$.

Menggunakan prosedur pada diagram tersebut, siswa dapat dibimbing menggunakan notasi aljabar untuk menemukan cara melengkapkan kuadrat secara aljabar.

c. Metode Fang Cheng dalam pembelajaran Sistem Persamaan Linear (SMA)

Dalam teks kuno *Jianzhang Suan Shu*, yang terjemahan Inggrisnya *Nine Chapters of the Mathematical Arts* (abad ke-2 atau 3 SM), telah menyuguhkan soal tentang sistem persamaan linear, termasuk metode untuk menyelesaikannya. Metode penyelesaiannya dapat digunakan dalam pembelajaran sistem persamaan linear sebagai awal dalam mengenalkan metode matriks.

Contohnya untuk soal berikut (soal dari buku *Jianzhang Suan Shu*):

Terdapat tiga jenis jagung. Untuk tiga karung jenis pertama, ditambah dua karung jenis kedua, dan sekarung jenis ketiga harganya 39. Dua karung jenis pertama, tiga karung jenis kedua, dan sekarung jenis ketiga harganya 34. Sekarung jenis pertama, dua karung jenis kedua, dan tiga karung jenis ketiga harganya 26. Berapakah harga jagung keseluruhan bila diambil masing-masing jenis sekarung saja?

Penulis soal kemudian menyusun koefisien-koefisien dalam sistem persamaan yang digambarkan dalam soal di atas, ke dalam sebuah tabel (tabel 1).

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Tabel 1

0	0	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

Tabel 2

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

Tabel 3

Metode kita sekarang biasanya menulis koefisien tiap persamaan menurut arah baris, tetapi metode Cina Kuno di atas menurut arah kolom. Hal ini mungkin disebabkan penulisan Cina sering dari atas ke bawah. Penulis kemudian meminta pembaca mengalikan kolom tengah dengan 3, lalu dikurangi kolom kanan “sebanyak mungkin”. Juga, setelah mengali tiga kolom kiri lalu dikurangi kolom kanan “sebanyak mungkin”. Jelas bahwa pengertian “sebanyak mungkin” dari penulis naskah kuno tersebut, berarti dikurangi hingga hasil nol diperoleh. Pengerjaan di atas memberi hasil berikut seperti papan kedua.

Selanjutnya, kolom kiri dikali 5, lalu dikurangi kolom tengah “sebanyak mungkin”. Ini memberikan hasil seperti tabel 3. Dari hasil terakhir ini, kita dapat menemukan harga untuk tiap karung jenis ketiga. Selanjutnya, dengan melakukan substitusi, akan kita peroleh harga untuk tiap karung jenis kedua, dan jenis pertama. Metode ini yang disebut metode *Fang Cheng*, kini disebut Metode Eliminasi Gauss, yang baru dikenal di Eropa sekitar awal abad ke-19.

Contoh 10 (perkembangan suatu konsep)

Perkembangan konsep fungsi trigonometri (SMP, SMA)

Penggunaan fungsi trigonometri bermula sebagai hubungan antara matematika dan astronomi, sehingga trigonometri mula-mula berkenaan dengan trigonometri bola (*spherical trigonometry*). Bila diberikan sebuah lingkaran (biasanya berjari-jari 60, yaitu dalam satuan *seksagesimal*) maka masalahnya adalah mencari panjang tali busur (*chord*) di hadapan suatu sudut pusat. Tabel tali busur yang pertama dikenal dari Hipparchus (k.180-k.125 SM) sekitar 140 SM tetapi bukunya sendiri telah hilang.

Pemakaian setengah tali busur (*half chord*) - dalam notasi modern berarti menunjukkan nilai *sinus* - dimulai di India. Dalam karya Aryabhata I, sekitar 500 M, terdapat tabel setengah tali busur dengan menggunakan nama "jya". Tabel yang serupa juga dihasilkan oleh Brahmagupta tahun 628 dan Bhaskara II (1114-k.1185) pada tahun 1150.

Al-Battani atau dikenal di Eropa sebagai albatenus (k.858-929) memberikan rumusan yang menghasilkan sebuah daftar fungsi kotangens untuk setiap derajat sudut. Abu al-Wafa` orang yang pertama kali menggunakan fungsi tangens dalam tabel. Dia juga memperkenalkan fungsi sekant dan kosekan serta membahas hubungan antara keenam fungsi trigonometri dengan lewat sebuah busur.

Studi tentang trigonometri sebagai ilmu matematika, lepas dari astronomi pertama kali diberikan oleh Nashiruddin al-Tusi (1201-1274), lewat bukunya *Treatise on the quadrilateral*. Bahkan dalam buku ini ia untuk pertama kali memperlihatkan keenam fungsi trigonometri lewat sebuah segitiga siku-siku (hanya masih dalam trigonometri sferis).

Konsep tangen dan kotangen sendiri lahir dengan jalur yang berbeda dengan sinus dan kosinus. Konsep tangen dan kotangen pada mulanya tidak berhubungan langsung dengan sudut, tetapi berasal dari perhitungan tinggi menggunakan panjang bayangan matahari (studi gnomonic). Di Arab, studi ini dikenal dengan nama studi gnomon, suatu bagian alat penunjuk waktu dengan bantuan sinar matahari, dan mulai muncul oleh matematikawan Arab sekitar 860. Kedua istilah Arab zill dan zill-mâkus diterjemahkan ke Latin menjadi umbra recta dan umbra versa. Konsep sekant dan kosekan pun lahir dari studi tentang gnomon ini.

Tahun 1533, Regiomontanus atau Johann Müller (1436-1476) menerbitkan buku *De triangulis omnimodis* yang dipercaya beberapa sejarawan sebagai buku lengkap pertama yang membahas trigonometri bidang (tulisan sendiri dimulai tahun 1464). Tabel-tabel trigonometri mula-mula banyak berhubungan dengan sinus dan tangen sebab kosinus, kotangen dan lainnya dapat langsung diperoleh dari tabel sinus dan tangen.

2. Evolusi Matematika

Matematika tidaklah muncul secara tiba-tiba. Matematika bukanlah barang yang aneh dan kaku - sehingga banyak yang merasa takut dengan matematika – ia bukan warisan para dewa. Matematika itu produk yang biasa saja, ia lahir karena ada sebab-sebab yang melahirkannya seperti halnya produk manusia lainnya, semisal lampu, sepeda, sistem pemerintahan, jenis musik, dan lain-lain. "*Mathematics has not grown in a vacuum*" (matematika tidak lahir dalam kevakuman) demikian Raymond L. Wilder (1981: 161).

Ada yang membedakan antara sejarah matematika di satu sisi dengan evolusi matematika di sisi lain. Kalau sejarah matematika umumnya berkenaan dengan *record* (catatan) perkembangan matematika secara kronologis, maka evolusi

matematika lebih menekankan pada *proses* perkembangan matematika itu atau secara lebih khusus membicarakan tentang sebab-sebab perkembangan konsep yang satu (*primitif*) menuju ke konsep yang lain (*modern*). Moore menyatakan “*Mathematical sciences, like all other living things, has its own natural laws of growth*” (pengetahuan matematika seperti juga perikehidupan manusia lainnya, memiliki hukum-hukum pertumbuhan alaminya sendiri) (Wilder: 1981). Beberapa faktor yang mempengaruhi perkembangan matematika seperti diungkap oleh Wilder antara lain: *hereditary stress* (faktor dari “dalam” diri matematika), *environment stress* (faktor lingkungan), *diffusion* (faktor bergabungnya beberapa ide matematika), *consolidation* (faktor meleburnya beberapa ide/konsep matematika menjadi ide/konsep baru), *selection* (faktor seleksi ide matematika yang tepat atau yang penting), *symbolic achievement* (faktor perkembangan simbolisasi), *exceptional individual* (faktor beberapa orang yang secara tak biasa dapat melihat beberapa hal jauh ke depan melebihi pemikiran pada jamannya), *leaps in abstraction* (faktor lompatan tingkat abstraksi suatu ide/konsep matematika), *great generalization* (faktor generalisasi konsep matematika), dan lain-lain.

Guru yang memahami sebab-sebab perkembangan suatu konsep matematika, akan lebih mudah menangani pembelajaran konsep tersebut. Guru akan dapat menghindari miskonsepsi-miskonsepsi dalam pembelajaran matematika.

Contoh 11 (SD) (mengenai penggunaan angka romawi dan hindu-arab)

Mengapa kita tidak berhitung dengan angka romawi saja? Ada apa dengan angka romawi? Tentu saja, di sini guru harus memahami bahwa sistem Romawi tidak menggunakan *nilai tempat* dan tidak mengenal *angka nol*. Pentingnya sistem nilai tempat memungkinkan kita menulis bilangan yang sangat besar sekalipun dengan beberapa angka saja. Coba tulis bilangan 80.249 dengan angka Romawi, berapa angka diperlukan? Coba juga untuk 21.433.000 (tidak ada angka Romawi untuk bilangan ini). Selain itu, penggunaan nilai tempat terutama memudahkan untuk perhitungan. Contohnya dalam menjumlah, maka kita tinggal memperhatikan angka yang nilai tempatnya sama. Lalu, angka Romawi juga tidak mengenal angka nol, padahal angka ini penting untuk menyatakan pecahan desimal. Karena itu kita

menggunakan angka Hindu-Arab dalam berbagai aktivitas, termasuk berhitung. Ini salah satu contoh faktor *selection* dalam perkembangan matematika.

Contoh 12 (SMP) (mengenai penggunaan 360° untuk satu putaran penuh)

Mengapa di dalam matematika, kita menggunakan 360° untuk satu putaran penuh? Mengapa tidak 100° saja yang kelihatannya lebih sesuai dengan hitung-menghitung desimal? Jawabnya, kebutuhan manusia menghendaki penggunaan bilangan 360° , yaitu ketika manusia dulu memanfaatkan perputaran bumi selama lebih kurang 360 hari (tepatnya 365 hari). Perkembangan selanjutnya, para ahli memandang tidak penting mengubah bilangan 360 tersebut. Ini contoh dari faktor *environment stress* (tekanan lingkungan).

Contoh 13 (SMP, SMA) (mengenai batasan atau definisi fungsi)

Siswa mungkin akan bertanya-tanya mengapa pengertian fungsi *hanya* dibatasi pada elemen tunggal di daerah kodomain untuk setiap elemen di daerah domain?? Mengapa suatu aturan yang menghasilkan dua atau lebih elemen hasil (peta) tidak disebut fungsi? Sebagai contoh, mengapa $g(x) = 1 \pm \sqrt{x}$ tidak disebut saja fungsi? Jawabnya, karena para ahli merasa perlu membatasi istilah fungsi untuk yang bernilai tunggal agar analisis terhadap berbagai persoalan (terutama dalam sains) menjadi lebih mudah. Hal ini terutama untuk kebutuhan mendapatkan fungsi inversnya.

Selain untuk lebih menambah pemahaman siswa akan suatu konsep yang dipilih dan berkembang, evolusi matematika juga memberikan kita kesadaran untuk menumbuhkan kembangkan rasa keingintahuan siswa, terutama untuk siswa yang berbakat, tentang alternatif-alternatif mengembangkan suatu masalah matematika atau menyelesaikan suatu masalah matematika yang pelik.

Contoh 14 (SMP, SMA) (mengenai perluasan Tripel Pythagoras)

Sepengetahuan penulis, hal ini pernah dilakukan dalam LKTI Remaja. Persoalannya adalah kita telah mengenal tentang *Tripel Pythagoras*, tetapi apakah ada empat bilangan bulat (positif) a , b , c , dan d yang memenuhi $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ atau pun $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$? Eksplorasi soal ini secara aljabar akan mengantarkan

siswa menemukan rumusan aljabar untuk mendapatkan *kuartet-kuartet* tersebut. Selain itu, soal tersebut memiliki makna penting bila dihubungkan dengan kenyataan bahwa *kuartet* $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ menunjukkan hubungan panjang, lebar, dan tinggi sebuah balok dengan diagonal ruangnya, sementara *kuartet* $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ menunjukkan hubungan panjang sisi-sisi salah satu jenis segiempat talibusur (segiempat yang titik-titik sudutnya pada sebuah lingkaran).

Contoh 15 (SMP, SMA) (mengenai perluasan sudut istimewa)

Mengapa sudut-sudut 0° , 30° , 45° , 60° , dan 90° disebut sudut-sudut istimewa? Pada aspek apakah istimewanya? Adakah sudut istimewa yang lain? Mungkinkah sudut-sudut istimewa diperluas lagi maknanya? Eksplorasi terhadap masalah ini, mengantarkan siswa pada pengkajian segilima beraturan, pengkajian tentang konstruktibilitas, penggunaan dan penemuan rumus-rumus aljabar, dan lain-lain.

Lebih lanjut, mengenai evolusi matematika ini dinyatakan oleh Wilder: “*With the achievement of cultural status, such internal forces as heredity stress, consolidation, selection, symbolization and abstraction have played an increasingly important part in the evolution of mathematical thought. To ignore these forces and the manner in which they have influenced characteristic pattern of evolution seems to deprive both the historian and the students who follow him of a fuller understanding of the historical process.*” (1981: 162). Jadi proses dan faktor perkembangan matematika (evolusi matematika) adalah penting untuk melihat bagaimana sesungguhnya matematika sekarang ini dibentuk dan mendapatkan pemahaman yang menyeluruh terhadap matematika dan konsep-konsep dalam matematika.

3. Ethnomatematika

Implikasi karakteristik kultural dalam pembelajaran matematika, juga dapat dilihat pada topik yang sering disebut dengan ethnomatematika (*ethnomathematics*). Ethnomatematika mula-mula dipelopori oleh Ubiratan D`Ambrosio tahun 1985.

Di satu tingkat, ethnomatematika dapat disebut sebagai “matematika dalam lingkungan” (*math in the environment*) atau “matematika dalam komunitas” (*math in the community*). Pada tingkat lain, ethnomatematika merupakan cara khusus yang dipakai oleh suatu kelompok budaya tertentu dalam aktivitas mengelompokkan,

mengurutkan, berhitung dan mengukur (aktivitas-aktivitas matematis). Tidak seperti ethnobiologi, ethnokimia, atau pun ethnoastronomi; ethnomatematika baru saja lahir atau agak terlambat perkembangannya. Hal ini terutama dikarenakan asumsi formal bahwa matematika itu bebas kultur. Akan tetapi, sekarang ethnomatematika sudah diterima luas, *International Congress on Ethnomathematics* telah dua kali diadakan (Granada, Spanyol tahun 1998 dan Ouro Preto, MG, Brazil tahun 2002), serta ratusan buku, artikel, maupun *website* telah dipublikasikan.

Bagaimana ethnomatematika mempengaruhi pembelajaran matematika? Seperti yang kita ketahui, “isi” dan “semangat” matematika ada di mana-mana termasuk dalam suatu kelompok budaya tertentu seperti arsitektur, agrikultur, permainan masyarakat, tata bahasa, olahraga, bahkan peribadatan agama. Tentu saja yang dipelajari adalah sifat-sifat atau bentuk-bentuk matematika di dalamnya. Pembelajaran matematika dapat mengambil manfaat dari budaya tersebut, terutama sebagai sumber belajar matematika, selain untuk meningkatkan motivasi dan kepercayaan diri siswa dalam belajar matematika.

Banyak judul ethnomatematika yang pernah dipublikasikan, baik dalam bentuk buku maupun artikel, beberapa di antaranya: bentuk bola permainan “Sepak Takraw” (olah raga rakyat di Sumatera), bilangan dan penggunaannya di Kédang (Indonesia), permainan Mancala (Afrika), ornamen geometris masjid (Arab), berhitung dengan Quipu (Amerika Latin), aritmetika dalam Luo-Shu (Cina).

D’Ambrosio (2002: 3) menyatakan terdapat dua alasan utama penggunaan *ethnomathematics* dalam pendidikan: (1) untuk mereduksi anggapan bahwa matematika itu bersifat final, permanen, absolut (pasti), dan unik (tertentu), (2) mengilustrasikan perkembangan intelektual dari berbagai macam kebudayaan, profesi, jender, dan lain-lain.

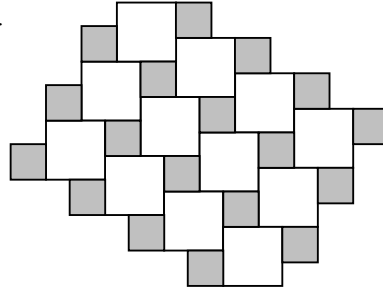
Contoh 16 (SMP, SMA) (hari pasaran untuk pembelajaran berhitung)

Penggunaan hari pasaran bagi orang Jawa yaitu *pon*, *wage*, *kliwon*, *legi*, dan *pahing* dalam pembelajaran berhitung merupakan contoh sederhana penerapan *ethnomatematika*. Hari pasaran dapat digunakan untuk menerapkan konsep basis bilangan. Contohnya, jika Dede berulang tahun tepat pada hari *rabu wage* maka satu tahun kemudian (melalui tahun kabisat) ia berulang tahun pada hari apa? Kita tahu,

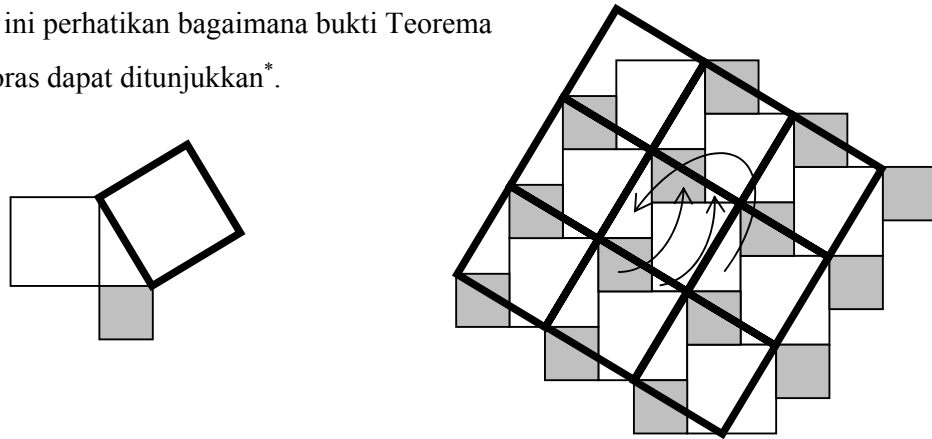
satu tahun kabisat memiliki 366 hari, yang bila dibagi 7 bersisa 2 dan bila dibagi 5 bersisa 1 sehingga satu tahun setelah *rabu wage* adalah *jum`at kliwon*.

Contoh 17 (SMP, SMA) (motif ubin untuk pembelajaran Teorema Pythagoras)

Motif pengubinan seperti di bawah ini yang menggunakan dua jenis ubin (berbeda besarnya) berbentuk persegi dapat dipergunakan untuk membuktikan Teorema Pythagoras.



Berikut ini perhatikan bagaimana bukti Teorema Pythagoras dapat ditunjukkan*.



B. Karakteristik Filosofis Matematika

Berangkat dari pertanyaan sederhana, “apakah sebenarnya matematika itu?”, para ahli telah bergumul dengan ide dan pemikiran filsafat sejak abad ke-19 hingga sekarang ini. Kini kita mengenal beberapa pemikiran atau sering disebut aliran dalam matematika, yang secara umum terdapat tiga aliran besar yang mempengaruhi jalan perkembangan matematika termasuk perkembangan pendidikan matematika.

1. Formalisme

Ahli matematika Jerman, David Hilbert (1862-1943) menjadi pelopor aliran matematika ini. Bagi kaum formalis, matematika itu sesungguhnya dikembangkan

* Menurut suatu sumber di internet, model ini pernah digunakan oleh An-Nairizi (di Barat dikenal sebagai Annaritus), seorang ahli astronomi dan matematikawan Arab.

melalui suatu sistem aksioma*. Sifat alami dari matematika itu adalah sistem lambang-lambang formal. Mereka percaya bahwa objek-objek matematika itu tidak ada hingga diciptakan oleh manusia melalui sistem aksioma. Mereka mencoba membuktikan bahwa seluruh bangunan matematika yang disusun dari sistem aksioma itu adalah konsisten. Pemikiran ini mempengaruhi buku-buku pelajaran dan kurikulum matematika selama pertengahan abad ke-20. Kurikulum 1975 adalah contoh *par excellent* dari pemikiran ini.

Walaupun semua sistem matematika masih menggunakan sistem aksioma, tetapi menganggap bahwa formalisme menjadi landasan matematika tidak diterima oleh beberapa ahli. Keberatan bermula ketika Godel membuktikan bahwa kita tidak mungkin dapat membuat suatu sistem lengkap yang konsisten dalam dirinya sendiri. Pernyataan ini terkenal dengan sebutan Teorema Ketidaklengkapan Godel (*Godel's Incompleteness Theorem*).

2. Logikalisme atau Logisisme

Dua ahli matematika sekaligus ahli filsafat dari Inggris menjadi pioner aliran atau landasan matematika ini, yaitu Bertrand Russell (1872-1970) dan Alfred North Whitehead (1861-1947) lewat buku mereka *Principia Mathematica* (1903). Menurut mereka semua matematika dapat diturunkan dari prinsip-prinsip logika. Kebanyakan ide-ide logika juga diterima oleh kaum formalis, tetapi mereka tidak percaya bahwa matematika dapat diturunkan dari logika saja. Sementara menurut kaum logisisme, matematika itu tidak lain adalah logika. Menurut istilah mereka, matematika itu masa dewasa dari logika.

Keberatan utama terhadap aliran ini adalah adanya paradoks-paradoks* logika (seperti paradoks teori himpunan pada aliran formalisme) yang tidak dapat diselesaikan oleh kaum pendukung logisisme.

3. Intuisionisme

Pioner aliran ini adalah Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) seorang matematikawan Belanda. Aliran ini sejalan dengan filsafat umum dari Immanuel

* Sistem yang disusun dari aksioma-aksioma (pernyataan-pernyataan pangkal)-lihat Bab IV

* Paradoks adalah pernyataan-pernyataan yang kelihatan aneh menurut akal sehat tetapi benar menurut ilmunya (atau sebaliknya)

Kant (1724-1804). Intuisi mengklaim bahwa matematika berasal dan berkembang di dalam pikiran manusia. Ketepatan dalil-dalil matematika tidak terletak pada simbol-simbol di atas kertas, tetapi terletak dalam akal pikiran manusia. Hukum-hukum matematika tidak ditemukan melalui pengamatan terhadap alam, tetapi mereka ditemukan dalam pikiran manusia.

Keberatan terhadap aliran ini adalah bahwa pandangan kaum intuisi tidak memberikan gambaran yang jelas tentang bagaimana matematika bekerja dalam pikiran. Kita tidak mengetahui secara tepat pengetahuan intuitif bekerja dalam pikiran. Konsep-konsep mental seperti cinta dan benci berbeda-beda antara manusia yang satu dengan yang lain. Apakah realistis bila menganggap bahwa manusia dapat berbagi pandangan intuitif tentang matematika secara persis sama. Lalu, mengapa kita mengajarkan matematika bila semua matematika adalah intuitif?

Lalu di mana implikasi teori-teori landasan matematika itu bagi pembelajaran matematika? Implikasi langsung memang kelihatannya tidak ada, tetapi ia akan mempengaruhi pola pikir seseorang (guru) dalam memandang matematika sehingga mempengaruhi cara guru membelajarkan matematika.

Guru yang menganggap matematika hanya merupakan kumpulan angka-angka dan rumus-rumus belaka maka sadar atau tidak ia telah menjadi pendukung kaum formalisme (yang ekstrem). Guru tipe ini seringkali hanya *mengajarkan* matematika bukannya *membelajarkan* matematika.

Contoh 18 (mengajarkan persamaan kuadrat-contoh pola pikir guru formalis yang ekstrem)

Guru memulai mengajarkan topik persamaan kuadrat sebagai pokok bahasan baru bagi siswa dengan menulis *rumus* persamaan kuadrat di papan tulis. “Ini yang disebut persamaan kuadrat, anak-anak..”, demikian ucap guru memulai pengajarannya. Setelah memberi penjelasan seperlunya, guru memberi sekian soal untuk *mendrill* keterampilan siswa dalam topik persamaan kuadrat tersebut tanpa memberi kesempatan kepada siswa untuk memahami sendiri mengapa dan bagaimana persamaan kuadrat ada dan perlu dipelajari. Biasanya, siswa yang mendapat pengajaran model guru formalis akan terampil mengolah simbol-simbol

tanpa memahami maknanya, bahkan bisa lebih buruk lagi: tidak mengerti apa pun tentang yang dipelajari!

Lalu, guru yang hanya mengandalkan logika atau akal sehat belaka tergolong guru logikalis. Biasanya guru tipe ini sulit memahami atau menerima kebenaran-kebenaran matematika yang kelihatannya sulit diterima akal sehat atau mungkin bertentangan dengan akal sehat, seperti orang tidak dapat memahami mengapa pensil yang dicelupkan ke dalam gelas berair bisa tampak terbelah dua. Bila guru tersebut tidak memahami struktur matematika, bisa jadi ia akan terjerembab ke dalam miskonsepsi-miskonsepsi (kesalahan konsep) yang diajarkan kepada siswa.

Contoh 19 (miskonsepsi dari pola induktif-contoh pola pikir guru logikalis yang ekstrem)

Pandang barisan pernyataan matematis di bawah ini:

$$6 : 12 = 0,5$$

$$6 : 6 = 1$$

$$6 : 2 = 3$$

$$6 : 0,1 = 60$$

$$6 : 0,001 = 6.000$$

$$6 : 0,000.000.001 = 6.000.000.000$$

demikian seterusnya.

Kesimpulan: Jika dibagi dengan bilangan yang makin kecil hasilnya makin besar.

Maka seharusnya (logisnya): $6 : 0 = \infty$. (lambang ∞ = tak berhingga (*infinite*)).

Guru yang berpikir logis seperti ini sukar menerima kenyataan bahwa di dalam matematika: bilangan real berapapun jika dibagi dengan nol tidak mempunyai hasil/jawaban atau sering disebut pembagian dengan nol *tidak terdefinisi*.*

Lebih gawat lagi bila miskonsepsi ini ditularkan kepada siswa. Sebagai perbandingan, sebuah buku panduan matematika sekolah di Amerika Serikat pernah memuat kesalahan serupa dengan menulis $1 : 0 = \infty$.

* Andai $6 : 0 = x$ maka pernyataan yang ekuivalen $x \cdot 0 = 6$. Tidak ada bilangan real x yang memenuhi.

Pola pikir intuitif tulen juga kurang baik dalam pembelajaran. Contoh yang kurang tepat dari guru dengan pola pikir intuitif tulen adalah dengan membiarkan siswa menemukan jalan penyelesaiannya sendiri atau menggunakan bahasanya sendiri. Guru intuitif hanya mementingkan hasilnya saja, asalkan benar maka tidak menjadi masalah. Seharusnya guru juga harus berperan sebagai fasilitator yaitu mengarahkan siswa pada penalaran dan juga penulisan lambang formal.

Contoh 20 (permisifisme-contoh pola pikir guru intuitif yang ekstrem)

Permisifisme (serba boleh) bisa menunjukkan pola pikir guru intuitif tulen. Misalnya ketika mengajarkan pokok bahasan urutan ada siswa yang menulis lambang “lebih kecil” dengan: “ \subset ” (kurang menyiku). Setelah melihat bahwa siswa sebenarnya telah memahami tentang sifat urutan, ia tidak mempermasalahkan kesalahan simbol tersebut. Ini tidak dibenarkan dalam pembelajaran. Penggunaan simbol-simbol matematika secara tepat juga merupakan tujuan pembelajaran matematika dalam rangka mengkomunikasikan masalah secara lebih efisien dan tepat dengan bahasa matematika. Juga bila kesalahan penulisan simbol dibiarkan akan mengganggu siswa untuk mempelajari matematika lebih lanjut (apalagi bila simbol yang sama dijumpai berbeda makna, seperti contoh di atas: lambang “ \subset ” seharusnya untuk himpunan).

Lalu, aliran atau landasan matematika mana yang benar? Atau bagaimana guru harus bersikap? Pertanyaan pertama bukanlah otoritas bagi kita selaku pendidik, tetapi perlu diketahui sejauh ini pun tidak ada aliran yang diterima secara bulat. Apa yang dapat kita lakukan adalah menjaga keseimbangan dalam rangka pembelajaran matematika secara optimal dan bermakna. Kita harus menghindari pola-pola pikir yang terlalu ekstrem. Dengan adanya paradigma konstruktivisme dalam pembelajaran dewasa ini, tidak berarti bahwa siswa tidak difasilitasi guru sama sekali, juga tidak berarti lambang-lambang formal tidak dibutuhkan, juga tidak berarti logika di kesampingkan.

C. Deskripsi Matematika

Matematika sering dideskripsikan dengan cara yang berbeda-beda tergantung dari sudut pandang mana yang dipakai. Berikut ini beberapa deskripsi matematika yang sering dipergunakan.

1. Matematika sebagai struktur yang terorganisir.

Agak berbeda dengan ilmu dan pengetahuan yang lain, matematika merupakan suatu bangunan struktur yang terorganisir. Sebagai sebuah struktur, ia terdiri dari beberapa komponen yang antara lain meliputi aksioma/postulat, pengertian pangkal/primitif, dan dalil/teorema (termasuk di dalamnya lemma (teorema pengantar/kecil) dan corollary/sifat).

2. Matematika sebagai alat (*tool*)

Matematika juga sering dipandang sebagai alat dalam mencari solusi berbagai masalah kehidupan sehari-hari. “*Mathematics is the queen of science...*” demikian Karl Frederich Gauss mengungkapkan beberapa abad yang lalu.

3. Matematika sebagai pola pikir deduktif

Seperti telah disinggung pada bagian di muka, matematika merupakan pengetahuan yang berpola pikir deduktif, artinya suatu teori atau pernyataan dalam matematika diterima kebenarannya bila telah dibuktikan secara deduktif (umum).

4. Matematika sebagai cara bernalar (*the way of thinking*)

Matematika dapat pula dipandang sebagai cara bernalar, paling tidak karena beberapa hal, seperti matematika memuat cara pembuktian yang sah (valid), rumus-rumus atau aturan yang umum, atau sifat penalaran matematika yang sistematis.

5. Matematika sebagai bahasa artifisial

Simbol merupakan ciri paling menonjol dalam matematika. Bahasa matematika adalah bahasa simbol yang bersifat artifisial, yang baru memiliki arti bila dikenakan pada suatu konteks.

6. Matematika sebagai seni yang kreatif

Penalaran yang logis dan efisien serta perbendaharaan ide-ide dan pola-pola yang kreatif dan menakjubkan, maka matematika sering pula disebut sebagai seni, khususnya merupakan seni berpikir yang kreatif.

Dalam pembelajaran matematika, semua pandangan tersebut di atas harus dipergunakan secara proposional. Tidak boleh hanya menekankan pada keberadaan simbol belaka tanpa memperhatikan struktur yang terkait, juga tidak boleh mementingkan penalaran saja tanpa penguasaan rumus atau aturan/prosedur matematika yang memadai, tidak pula mementingkan sifat deduktif dengan mengabaikan contoh atau pendekatan induktif dalam pembelajaran.

Deskripsi matematika dalam Buku panduan Lawrence University seperti dikutip oleh Susilo, F (dalam Sumaji, dkk, 1998 : 228) menyuguhkan harmoni yang sungguh indah dan menurut penulis telah meliputi seluruh karakteristik matematika. Redaksi dari pernyataan tersebut sebagai berikut:

Lahir dari dorongan primitif manusia untuk menyelidiki keteraturan dalam alam semesta, matematika merupakan suatu bahasa yang terus-menerus berkembang untuk mempelajari struktur dan pola. Berakar dalam dan diperbaharui oleh realitas dunia, serta didorong oleh keingintahuan intelektual manusiawi, matematika menjulang tinggi menggapai alam abstraksi dan generalitas, tempat terungkapnya hubungan-hubungan dan pola-pola yang tak terduga, menakjubkan, sekaligus amat bermanfaat bagi kehidupan manusia. Matematika adalah rumah alami baik bagi pemikiran-pemikiran yang abstrak maupun bagi hukum-hukum alam semesta yang konkret. Matematika sekaligus merupakan logika yang murni dan seni yang kreatif.

BAB IV

Karakteristik Umum Matematika dan Implikasinya dalam Pembelajaran

Pada bagian terdahulu telah dipaparkan tentang karakteristik kultural, karakteristik filosofis, maupun beberapa deskripsi matematika yang tampaknya bahwa matematika itu berbeda-beda antara matematikawan yang satu dengan lainnya. Namun demikian, di dalam setiap pandangan terhadap matematika terdapat beberapa ciri matematika yang secara umum disepakati bersama. Beberapa di antaranya adalah sebagai berikut:

A. Karakteristik Umum Matematika

1. Memiliki objek kajian yang abstrak

Matematika mempunyai objek kajian yang bersifat abstrak, walaupun tidak setiap objek abstrak adalah matematika. Sementara beberapa matematikawan menganggap objek matematika itu “konkret” dalam pikiran mereka, maka kita dapat menyebut objek matematika secara lebih tepat sebagai objek mental atau pikiran. Ada empat objek kajian matematika, yaitu fakta, operasi (atau relasi), konsep, dan prinsip.

a. Fakta

Fakta adalah pemufakatan atau konvensi dalam matematika yang biasanya diungkapkan lewat simbol tertentu.

Contoh 21 (SD) (contoh-contoh fakta)

Simbol “2” secara umum telah dipahami sebagai simbol untuk bilangan dua. Sebaliknya bila kita menghendaki bilangan dua, cukup dengan menggunakan simbol “2”. Fakta yang lain dapat berupa gabungan dari beberapa simbol, seperti “ $3 + 2$ ” yang dipahami sebagai “tiga ditambah dua”, “ 2×3 ” yang dipahami sebagai “dua kali tiga” yang tentunya berbeda dengan simbol “ 3×2 ”, “ $3 \times 4 = 12$ ” yang dipahami sebagai “tiga kali empat sama dengan dua belas”, “ $2 < 3$ ” yang dipahami sebagai “dua lebih kecil dari tiga”.

Contoh 22 (SMP, SMA) (contoh-contoh fakta yang kompleks)

Yang agak kompleks fakta seperti “ $\pi \approx 3,14$ ” yang dipahami sebagai “bilangan pi mendekati tiga koma satu empat”, “ $2^3 = 2 \times 2 \times 2$ ” yang dipahami sebagai “dua pangkat tiga sama dengan dua kali dua kali dua”. Dalam geometri juga terdapat simbol-simbol tertentu, seperti “ \perp ” yang berarti “tegak lurus”, simbol “//” yang berarti “sejajar”. Dalam trigonometri kita kenal simbol “ \sphericalangle ” yang berarti “sudut”, simbol “ Δ ” yang menunjukkan “segitiga”, juga yang agak kompleks seperti “sin” yang berarti “perbandingan atau fungsi sinus”. Dalam aljabar, simbol “ (a, b) ” menunjukkan “pasangan berurutan”, simbol “ f ” yang dipahami sebagai “fungsi”, dan masih banyak lagi.

Cara mempelajari fakta bisa dengan cara hafalan, drill (latihan terus-menerus), demonstrasi tertulis, dan lain-lain. Namun perlu dicamkan bahwa mengingat fakta adalah penting tetapi jauh lebih penting memahami konsep yang diwakilinya. Mengutip istilah Skemp, arti atau konsep yang diwakili oleh simbol disebut *deep structure* (struktur dalam), sementara bentuk simbol itu sendiri merupakan *surface structure* (struktur muka).

Rubenstein & Thompson (2000: 268) mengingatkan:

In general, teachers must be aware of the difficulties that symbolism creates for students. Symbolism is a form of mathematical language that is compact, abstract, specific, and formal. Therefore, opportunities to use that language should be regular, rich, meaningful, and rewarding. (Secara umum, guru harus menyadari kesulitan-kesulitan tentang simbol bagi siswa. Simbolisme merupakan bentuk bahasa matematika yang rapi, abstrak, khusus, dan formal ... Dengan demikian, kesempatan menggunakan bahasa tersebut seharusnya secara bertahap, kaya, penuh arti, dan bermanfaat).

Dengan demikian dalam memperkenalkan simbol atau fakta matematika kepada siswa, guru seharusnya melalui beberapa tahap yang memungkinkan siswa dapat menyerap makna dari simbol-simbol tersebut.

Penggunaan simbol seharusnya secara informal pada tahap awal, untuk membantu anak tetap pada pola dan hubungan yang dapat mereka pahami. Dalam hal ini pendekatan *enaktif-ikonik-simbolik* dari J. Bruner dapat

diterapkan. Mereka bahkan dapat menggunakan simbol-simbol pilihan mereka sendiri. Hal ini dipikirkan sebagai suatu cara untuk menjaga partisipasinya dalam proses penemuan dan formalisasi pengalaman matematika. Hal tersebut juga untuk menjaga pengalaman belajar dari sekedar hanya latihan mengingat. (Resnick & Ford, 1981: 122).

Penggunaan fakta yang berupa simbol bila terlalu cepat diberikan kepada siswa, dapat menyebabkan salah pengertian atau miskonsepsi terhadap simbol tersebut. Selain itu, penekanan pada aspek teknis berupa perhitungan belaka, juga dapat menimbulkan miskonsepsi tersebut.

Contoh 23 (SD) (contoh miskonsepsi)

Miskonsepsi yang sering terjadi di SD adalah penggunaan yang kurang tepat terhadap simbol “=”. Siswa sering kali memahami simbol “=” tidak hanya berarti “sama dengan” tetapi juga “memberi hasil”. Bila pengertian yang terakhir ini melekat pada pikiran siswa, mungkin ia akan menulis seperti kalimat berikut: $2 + 3 = 5 + 7 = 12 + 4 = 16$. Tentu kalimat ini secara matematis merupakan kalimat yang salah.

Contoh 24 (SMP, SMA) (contoh miskonsepsi)

Siswa sering kali dibimbing hanya menggunakan fakta-fakta matematika, tanpa memperhatikan pemahamannya. Salah satu contoh adalah pemahaman terhadap bilangan pi (π). Ada siswa yang memiliki anggapan π bernilai sama dengan 3,14 atau $\frac{22}{7}$, bukannya sekedar nilai pendekatan. Ada pula yang lebih parah, menganggap nilai π sama dengan 180° , bukan memahami sebagai kesetaraan antara radian dan derajat.

b. Konsep

Konsep adalah idea abstrak yang dapat digunakan untuk menggolongkan atau mengkategorikan sekumpulan objek, apakah objek tertentu merupakan contoh konsep atau bukan.

Contoh 25 (SD, SMP, SMA) (contoh tentang konsep)

“Segitiga” adalah nama suatu konsep. Dengan konsep itu kita dapat membedakan mana yang merupakan contoh segitiga dan mana yang bukan

contoh segitiga. “Bilangan prima” juga nama suatu konsep, yang dengan konsep itu kita dapat membedakan mana yang merupakan bilangan prima dan mana yang bukan. Konsep “bilangan prima” lebih kompleks dari konsep “segitiga” oleh karena di dalam konsep “bilangan prima” memuat konsep-konsep lain seperti “faktorisasi”, “bilangan”, “satu”, dan lain-lain. Di samping itu, dalam matematika terdapat konsep-konsep yang penting, seperti “fungsi” dan “variabel”. Selain itu terdapat pula konsep-konsep yang lebih kompleks, seperti “matriks”, “determinan”, “periodik”, “gradien”, “vektor”, “group”, dan “bilangan pi”.

Konsep dapat dipelajari lewat definisi atau observasi langsung. Siswa telah dianggap memahami konsep bila ia dapat memisahkan contoh konsep dari yang bukan contoh konsep.

1). Definisi

Konsep berhubungan dengan definisi. Definisi adalah ungkapan yang membatasi konsep. Dengan adanya definisi, orang dapat membuat ilustrasi, gambar, skema, atau simbol dari konsep yang didefinisikan.

Contoh 26 (SD, SMP, SMA) (contoh definisi)

Konsep “lingkaran” dapat didefinisikan sebagai “kumpulan titik-titik pada bidang datar yang memiliki jarak yang sama terhadap titik tertentu”. Dengan definisi tersebut di atas maka akan menjadi jelas apa yang disebut lingkaran. Dengan definisi tersebut pula orang dapat membuat sketsa dari lingkaran, dan pada kasus ini orang sepakat memilih simbol “ \odot ” untuk menunjukkan lingkaran. Apakah definisi lingkaran di atas merupakan satu-satunya definisi untuk lingkaran? Tentu saja tidak. Di SMA, siswa telah mengenal pendefinisian lingkaran dengan cara analitik, yaitu menggunakan koordinat titik (x, y) dalam bidang datar (koordinat kartesian).

Ada tiga macam definisi yang dikenal:

a). Definisi analitik

Suatu definisi disebut bersifat analitik apabila definisi tersebut dibentuk dengan *genus proksimum* dan *deferensia spesifika* (genus: keluarga terdekat, deferensia spesifika: pembeda khusus).

Contoh 27 (SMP) (contoh definisi analitik)

Perhatikan dua definisi belahketupat berikut ini.

- Belahketupat adalah jajaran genjang yang ...
- Belahketupat adalah segiempat yang ...

Definisi yang pertama menyebutkan *genus proksimum* jajar genjang, sedang definisi kedua menyebutkan segiempat sebagai *genus proksimum* atau keluarga terdekatnya. *Deferensia spesifikanya* adalah sifat yang disebutkan setelah kata “yang”.

b). Definisi genetik

Suatu definisi dikatakan bersifat genetik apabila pada definisi tersebut terdapat ungkapan tentang cara terjadinya konsep yang didefinisikan.

Contoh 28 (SD, SMP) (contoh definisi genetik)

Definisi-definisi berikut ini bersifat genetik.

- Segitiga siku-siku adalah segitiga yang terjadi bila suatu persegi panjang dipotong menurut salah satu garis diagonalnya.
- Jaring-jaring limas adalah bangun yang terjadi bila sisi-sisi limas direbahkan dengan poros rusuk alas hingga sampai ke bidang pemuat alasnya.

c). Definisi dengan rumus

Definisi dengan rumus adalah definisi yang dinyatakan dengan menggunakan kalimat matematika.

Contoh 29 (SMP, SMA) (contoh definisi dengan rumus)

Berikut contoh definisi dengan rumus:

- Dalam ilmu bilangan (aritmetika): $a - b = a + (-b)$
- Dalam aljabar: $n! = 1.2.3.4. \dots (n - 2)(n - 1)n$ dengan $0! = 1! = 1$
(bentuk definisi ini disebut pula bentuk dengan induksi)

2). Intensi dan Ekstensi suatu Definisi

Sekarang kita tinjau segi lain dari definisi. Dalam suatu definisi terdapat 2 hal yang disebut *intensi* atau hal yang menjadi fokus dalam pernyataan dan ekstensi atau hal yang menjadi jangkauan dari pernyataan. Dapat terjadi dua definisi dengan intensi berbeda tetapi ekstensi yang sama. Untuk lebih jelasnya perhatikan sebuah contoh di bawah ini.

Contoh 30 (SD, SMP, SMA) (contoh intensi dan ekstensi dari definisi)

- (1). Segitiga samasisi adalah segitiga yang sisinya sama.
- (2). Segitiga samasisi adalah segitiga yang sudutnya sama.
- (3). Segitiga samasudut adalah segitiga yang ketiga sudutnya sama.
- (4). Segitiga samasudut adalah segitiga yang ketiga sisinya sama.

Definisi (1) dan (2) mendefinisikan hal yang sama, yaitu segitiga samasisi. Tetapi atributnya berbeda, yang satu mengutamakan sisi sedang yang lain mengutamakan sudut. Ini dikatakan bahwa definisi (1) dan (2) memiliki ekstensi (atau jangkauan) yang sama sedang intensinya berbeda.

Demikian juga terhadap definisi (3) dan (4), yang memiliki ekstensi sama tetapi intensi berbeda. Bahkan lebih jauh, keempat definisi tersebut di atas juga memiliki ekstensi yang sama. Adakah segitiga samasisi yang bukan segitiga samasudut, dan sebaliknya? Tentu jawabnya tidak ada. Keempat definisi tersebut sama atau disebut ekuivalen.

Berkaitan dengan intensi dan ekstensi suatu definisi, maka definisi suatu konsep matematika dapat berbagai macam bentuknya. Karena itu, definisi yang mungkin dikemukakan siswa dapat saja berbeda dengan definisi formal yang biasa digunakan dalam matematika. Dalam hal ini guru harus jeli melihat kemungkinan kesamaan dari definisi-definisi tersebut. Guru tidak boleh menyalahkan definisi yang diberikan siswa bila memang ternyata memiliki pengertian yang sama. Bila pun salah, guru harus memfasilitasi pikiran siswa menuju pada definisi yang tepat.

c. Operasi dan relasi

Operasi adalah pengerjaan hitung, pengerjaan aljabar, dan pengerjaan matematika lainnya. Sementara relasi adalah hubungan antara dua atau lebih elemen.

Contoh 31 (SD, SMP) (contoh operasi dan relasi)

Contoh operasi antara lain: “penjumlahan”, “perpangkatan”, “gabungan”, “irisan”, dan lain-lain. Sedang relasi antara lain: “sama dengan”, “lebih kecil”, dan lain-lain.

Pada dasarnya operasi dalam matematika adalah suatu fungsi yaitu relasi khusus, karena operasi adalah aturan untuk memperoleh elemen tunggal dari satu atau lebih elemen yang diketahui. Semesta dari elemen-elemen yang dioperasikan dengan elemen yang diperoleh dari operasi tersebut bisa sama bisa pula berbeda. Elemen yang dihasilkan dari suatu operasi disebut hasil operasi.

Dalam matematika dikenal bermacam-macam operasi, yaitu operasi “unair” bila melibatkan hanya satu elemen yang diketahui, operasi “biner” bila melibatkan tepat dua elemen yang diketahui, operasi “terner” bila melibatkan tepat tiga elemen yang diketahui.

Contoh 32 (SD, SMP, SMA) (contoh jenis operasi)

Operasi “penjumlahan”, “perkalian”, “gabungan”, “irisan” termasuk contoh operasi biner, sementara operasi “pangkat dua”, “tambah lima”, “komplemen” termasuk contoh-contoh operasi unair.

Operasi seringkali juga disebut sebagai “skill” (keterampilan), bila yang ditekankan adalah keterampilannya. Keterampilan ini dapat dipelajari lewat demonstrasi, drill, dan lain-lain. Siswa dianggap telah menguasai suatu keterampilan atau operasi bila ia dapat mendemonstrasikan keterampilan atau operasi tersebut dengan benar.

d. Prinsip

Prinsip adalah objek matematika yang kompleks, yang terdiri atas beberapa fakta, beberapa konsep yang dikaitkan oleh suatu relasi atau pun operasi. Secara

sederhana dapatlah dikatakan bahwa prinsip adalah hubungan antara berbagai objek dasar matematika. Prinsip dapat berupa “aksioma”, “teorema” atau “dalil”, “corollary” atau “sifat”, dan sebagainya.

Contoh 33 (SD, SMP, SMA) (contoh prinsip)

Sifat komutatif dan sifat asosiatif dalam aritmetika merupakan suatu prinsip. Begitu pula dengan Teorema Pythagoras. Contoh sebuah aksioma antara lain “melalui satu titik A di luar sebuah garis g dapat dibuat tepat sebuah garis yang sejajar garis g ”.

Siswa dapat dianggap telah memahami suatu prinsip bila ia memahami bagaimana prinsip tersebut dibentuk dan dapat menggunakannya dalam situasi yang cocok. Bila, demikian berarti ia telah memahami fakta, konsep atau definisi, serta operasi atau relasi yang termuat dalam prinsip tersebut.

2. Bertumpu pada kesepakatan

Simbol-simbol dan istilah-istilah dalam matematika merupakan kesepakatan atau konvensi yang penting. Dengan simbol dan istilah yang telah disepakati dalam matematika maka pembahasan selanjutnya akan menjadi mudah dilakukan dan dikomunikasikan.

Contoh 34 (SD, SMP, SMA)

Lambang bilangan yang digunakan sekarang: 1, 2, 3, dan seterusnya merupakan contoh sederhana sebuah kesepakatan dalam matematika. Siswa secara tidak sadar menerima kesepakatan itu ketika mulai mempelajari tentang angka atau bilangan. Termasuk pula penggunaan kata “satu” untuk lambang “1”, atau “sama dengan” untuk “=” merupakan kesepakatan.

Contoh 35 (SMP, SMA)

Istilah “fungsi” kita batasi pengertiannya sebagai pemetaan yang mengawankan setiap elemen dari himpunan yang satu ke tepat sebuah elemen di himpunan yang lain. Mengapa harus menggunakan kata “tepat satu”? Penggunaan kata “tepat satu” merupakan contoh kesepakatan dalam

matematika. Bila ada pemetaan yang bernilai ganda, kita tidak menyebutnya sebagai fungsi.

Dalam matematika, kesepakatan atau konvensi merupakan tumpuan yang amat penting. Kesepakatan yang amat mendasar adalah aksioma (postulat, pernyataan pangkal yang tidak perlu pembuktian) dan konsep primitif (pengertian pangkal yang tidak perlu didefinisikan, *undefined term*). Aksioma yang diperlukan untuk menghindari berputar-putar dalam pembuktian (*circulus in probando*). Sedangkan konsep primitif diperlukan untuk menghindari berputar-putar dalam pendefinisian (*circulus in definiendo*).

Aksioma dapat diklasifikasikan menjadi 2 jenis; (1) aksioma yang bersifat “*self evident truth*”, yaitu bila kebenarannya langsung terlihat dari pernyataannya, dan (2) aksioma yang bersifat “*non-self evident truth*”, yaitu pernyataan yang mengaitkan fakta dan konsep lewat suatu relasi tertentu. Bentuk terakhir ini lebih terlihat sebagai sebuah kesepakatan saja.

Beberapa aksioma dapat membentuk suatu sistem aksioma, yang selanjutnya dapat menurunkan beberapa teorema. Dari satu atau lebih konsep primitif dapat dibentuk konsep baru melalui pendefinisian.

Contoh 36 (SMP, SMA) (contoh pengertian pangkal dan aksioma)

Titik, garis, dan bidang merupakan unsur-unsur primitif atau pengertian pangkal dalam geometri euclid. Sementara salah satu aksioma di dalamnya adalah: “melalui dua buah titik ada tepat satu garis lurus yang dapat dibuat”.

Contoh 37 (SMA) (contoh sistem aksioma)

Group didefinisikan lewat sistem aksioma. Suatu himpunan G dengan operasi biner $*$ yang memenuhi (1) tertutup, (2) asosiatif, (3) mempunyai unsur identitas, dan (4) tiap elemen memiliki invers, disebut suatu group, dan ditulis $(G, *)$. Aksioma tersebut bersifat *non-self evident truth*.

3. Berpola pikir deduktif

Dalam matematika hanya diterima pola pikir yang bersifat deduktif. Pola pikir deduktif secara sederhana dapat dikatakan pemikiran yang berpangkal dari hal yang bersifat umum diterapkan atau diarahkan kepada hal yang bersifat khusus.

Pola pikir deduktif ini dapat terwujud dalam bentuk yang amat sederhana tetapi juga dapat terwujud dalam bentuk yang tidak sederhana.

Contoh 38 (SD) (contoh pola pikir deduktif yang sederhana)

Seorang siswa telah memahami konsep dari “lingkaran”. Ketika berada di dapur ia dapat menggolongkan mana peralatan dapur yang berbentuk lingkaran dan mana yang bukan lingkaran. Dalam hal ini siswa tersebut telah menggunakan pola pikir deduktif secara sederhana ketika menunjukkan suatu peralatan yang berbentuk lingkaran.

Contoh 39 (SMP, SMA) (contoh pola pikir deduktif)

Banyak teorema dalam matematika yang “ditemukan” melalui pengamatan atau percobaan, seperti misalnya Teorema Pythagoras. Bila hasil pengamatan tersebut ingin dimasukkan ke dalam struktur matematika maka hasil tersebut harus dibuktikan secara deduktif untuk menjadi suatu teorema, tentu saja dengan menggunakan teorema dan definisi terdahulu yang telah diterima kebenarannya.

Contoh 40 (SMP, SMA) (contoh pola pikir deduktif)

Perhatikan pola jumlah bilangan-bilangan ganjil berikut ini.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \times 1 = 1^2 \\ 1 + 3 &= 2 \times 2 = 2^2 \\ 1 + 3 + 5 &= 3 \times 3 = 3^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 &= 4 \times 4 = 4^2 \\ &\dots \text{ dan seterusnya.} \end{aligned}$$

Dari pola yang terlihat kemudian disimpulkan bahwa:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2, \quad n \text{ adalah bilangan ganjil.}$$

Penarikan kesimpulan dengan pola pikir induktif di atas tidak dibenarkan dalam matematika. Pendekatan induktif tersebut tidaklah salah, tetapi untuk diterima sebagai kebenaran harus dilakukan secara umum (deduktif).

Salah satu bukti deduktif dapat ditempuh dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{array}{r}
 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 5) + (2n - 3) + (2n - 1) = S \\
 (2n - 1) + (2n - 3) + (2n - 5) + \dots + 5 + 3 + 1 = S \\
 \hline
 2n + 2n + 2n + \dots + 2n + 2n + 2n = 2S \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{sebanyak } n \text{ suku}} \\
 n \cdot 2n = 2S
 \end{array}$$

sehingga $S = \frac{1}{2} \cdot n \cdot 2n = n^2$.

4. Konsisten dalam Sistemnya

Dalam matematika terdapat berbagai macam sistem yang dibentuk dari beberapa aksioma dan memuat beberapa teorema. Ada sistem-sistem yang berkaitan, ada pula sistem-sistem yang dapat dipandang lepas satu dengan lainnya. Sistem-sistem aljabar dengan sistem-sistem geometri dapat dipandang lepas satu dengan lainnya. Di dalam sistem aljabar terdapat pula beberapa sistem lain yang lebih “kecil” yang berkaitan satu dengan lainnya. Demikian pula di dalam sistem geometri.

Contoh 41 (SMP, SMA) (contoh sistem aksioma)

Di dalam aljabar terdapat sistem aksioma dalam grup, sistem aksioma dalam ring, sistem aksioma dalam lapangan (*field*), dan lain-lain. Di dalam geometri terdapat sistem geometri netral, sistem geometri insidensi, sistem geometri Euclides, sistem geometri Lobachevski, dan lain-lain.

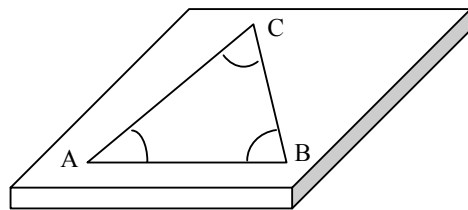
Di dalam masing-masing sistem berlaku **ketaatazasan** atau konsistensi. Artinya bahwa dalam setiap sistem tidak boleh terdapat kontradiksi. Suatu teorema atau pun definisi harus menggunakan istilah atau konsep yang telah ditetapkan terlebih dahulu. Konsistensi itu baik dalam makna maupun dalam hal nilai kebenarannya.

Antara sistem atau struktur yang satu dengan sistem atau struktur yang lain tidak mustahil terdapat pernyataan yang saling kontradiksi.

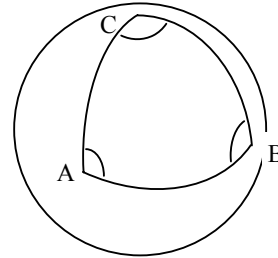
Contoh 42 (SMA) (contoh dua sistem yang memiliki pernyataan yang berbeda)

Contoh berikut sangat terkenal dalam matematika. Di dalam sistem geometri Euclid (geometri “datar”, yaitu geometri yang biasa dipelajari di sekolah) dikenal teorema berikut ini. “Jumlah besar sudut-sudut sebuah segitiga adalah seratus delapan puluh derajat”. Sementara di dalam sistem geometri Riemann (geometri “lengkung bola”, salah satu sistem geometri non-euclides), salah satu teorema berbunyi. “Jumlah besar sudut-sudut sebuah segitiga lebih (besar) dari seratus delapan puluh derajat”.

Perhatikan ilustrasi berikut untuk mendapatkan gambaran yang lebih jelas.



$$A + B + C = 180^\circ$$



$$A + B + C > 180^\circ$$

5. Memiliki simbol yang kosong dari arti

Karakteristik ini dapat dipandang termasuk ke dalam karakteristik butir A. Tetapi di sini akan dibahas tersendiri agar dapat dipahami lebih utuh.

Di dalam matematika banyak sekali terdapat simbol baik yang berupa huruf Latin, huruf Yunani, maupun simbol-simbol khusus lainnya. Simbol-simbol tersebut membentuk kalimat dalam matematika yang biasanya disebut model matematika. Model matematika dapat berupa persamaan, pertidaksamaan, maupun fungsi. Selain itu ada pula model matematika yang berupa gambar (*pictorial*) seperti bangun-bangun geometrik, grafik, maupun diagram.

Contoh 43 (SD, SMP, SMA) (contoh simbol yang kosong dari arti)

Model matematika, seperti $x + y = z$ tidak selalu berarti bahwa x , y , dan z berarti bilangan. Secara sederhana, bilangan-bilangan yang biasa digunakan dalam pembelajaran pun bebas dari arti atau makna real. Bilangan tersebut dapat berarti panjang, jumlah barang, volum, nilai uang, dan lain-lain tergantung pada konteks di mana bilangan itu diterapkan.

Bahkan tanda “+” tidak selalu berarti operasi tambah untuk dua bilangan, bisa jadi operasi untuk vektor, matriks, dan lain-lain.

Jadi secara umum, model/symbol matematika sesungguhnya kosong dari arti. Ia akan bermakna sesuatu bila kita mengkaitkannya dengan konteks tertentu. Secara umum, hal ini pula yang membedakan symbol matematika dengan symbol bukan matematika. Kosongnya arti dari model-model matematika itu merupakan “kekuatan” matematika, yang dengan sifat tersebut ia bisa masuk pada berbagai macam bidang kehidupan, dari masalah teknis, ekonomi, hingga ke bidang psikologi.

Walaupun demikian, kebanyakan siswa masih cukup kuat terikat dengan makna yang pertama kali atau yang biasa diajarkan oleh gurunya. Hal ini seperti yang pernah dikeluhkan oleh matematikawan Whitehead, “Yang paling sukar untuk menjelaskan kepada seseorang yang baru belajar matematika ialah bahwa x itu sama sekali tidak berarti”. (Jujun, 2002: 190). Maka dari itu, guru harus senantiasa waspada pada pengertian yang dipakai oleh siswa dalam mempelajari suatu topik bahasan matematika.

6. Memperhatikan Semesta Pembicaraan

Sehubungan dengan kosongnya arti dari symbol-symbol matematika, maka bila kita menggunakannya kita seharusnya memperhatikan pula lingkup pembicaraannya. Lingkup atau sering disebut semesta pembicaraan bisa sempit bisa pula luas. Bila kita berbicara tentang bilangan-bilangan, maka symbol-symbol tersebut menunjukkan bilangan-bilangan pula. Begitu pula bila kita berbicara tentang transformasi geometris (seperti translasi, rotasi, dan lain-lain) maka symbol-symbol matematikanya menunjukkan suatu transformasi pula.

Benar salahnya atau ada tidaknya penyelesaian suatu soal atau masalah, juga ditentukan oleh semesta pembicaraan yang digunakan. Berikut ini beberapa contoh sederhana.

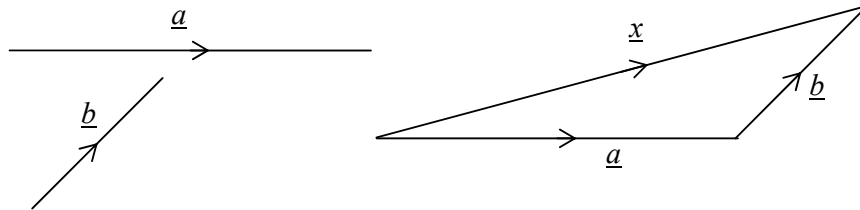
Contoh 44 (SD, SMP) (contoh penggunaan lingkup pembicaraan)

Dalam semesta himpunan bilangan bulat, terdapat model $2x = 3$. Adakah penyelesaiannya? Bila diselesaikan seperti biasa, tanpa menghiraukan semesta pembicaraannya, maka diperoleh $x = 1,5$. Tetapi 1,5 bukan bilangan bulat. Jadi dalam hal ini dikatakan bahwa model tersebut tidak

memiliki penyelesaian dalam semesta pembicaraan bilangan bulat. Atau sering dikatakan penyelesaiannya adalah “himpunan kosong”.

Contoh 45 (SMA) (contoh penggunaan lingkup pembicaraan)

Dalam semesta pembicaraan vektor di bidang datar, terdapat model $\underline{a} + \underline{b} = \underline{x}$. Di sini jelas bahwa huruf-huruf tersebut tidak berarti bilangan, tetapi harus berarti suatu vektor. Dalam hal ini bila vektor \underline{a} dan \underline{b} telah diketahui maka kita dapat menentukan vektor \underline{x} dengan berbagai cara, salah satunya secara geometris seperti di bawah ini.



B. Karakteristik Matematika Sekolah

Sehubungan dengan karakteristik umum matematika di atas, dalam pelaksanaan pembelajaran matematika di sekolah harus memperhatikan ruang lingkup matematika sekolah. Ada sedikit perbedaan antara matematika sebagai “ilmu” dengan matematika sekolah, perbedaan itu dalam hal: (1) penyajian, (2) pola pikir, (3) keterbatasan semesta, dan (4) tingkat keabstrakan.

1. Penyajian

Penyajian matematika tidak harus diawali dengan teorema maupun definisi, tetapi haruslah disesuaikan dengan perkembangan intelektual siswa.

Contoh 46 (SD) (contoh penyajian topik perkalian)

Pengertian perkalian seharusnya tidak langsung menyajikan bentuk matematika, semisal $3 \times 4 = 12$. Penyajiannya hendaknya didahului dengan melakukan penjumlahan berulang dengan menggunakan peraga, misalnya kelereng. Dengan peragaan itu, siswa mendapatkan pemahaman bahwa walaupun 3×4 dan 4×3 bernilai sama-sama 12, tetapi makna perkaliannya berbeda. Setelah siswa memahami makna perkalian, barulah diminta menghafalkan fakta dasar perkalian.

Contoh 47 (SMP) (contoh penyajian topik teori peluang)

Ketika menyajikan topik dalam teori peluang semisal “kejadian”, “ruang sampel”, “kejadian bebas”, dan lain-lain hendaknya tidak langsung kepada definisi atau teorema. Agar lebih bermakna bagi siswa, pendekatan konkret atau induktif dengan melakukan percobaan sederhana, misalnya melantunkan dadu dapat dilakukan seawal awal pembelajaran.

Sementara di SMA, pendekatan secara induktif atau konkrit sudah harus dikurangi, kecuali pada topik-topik yang memerlukan bantuan yang agak konkrit seperti teori peluang.

2. Pola pikir

Pembelajaran matematika sekolah dapat menggunakan pola pikir deduktif maupun pola pikir induktif. Hal ini harus disesuaikan dengan topik bahasan dan tingkat intelektual siswa. Sebagai kriteria umum, biasanya di SD menggunakan pendekatan induktif lebih dulu karena hal ini lebih memungkinkan siswa menangkap pengertian yang dimaksud. Sementara untuk SMP dan SMA, pola pikir deduktif sudah semakin ditekankan. Contoh-contoh yang disajikan sebelumnya juga menunjukkan contoh pola pikir yang digunakan di sekolah.

3. Semesta Pembicaraan

Sesuai dengan tingkat perkembangan intelektual siswa, maka matematika yang disajikan dalam jenjang pendidikan juga menyesuaikan dalam kekompleksan semestanya. Semakin meningkat tahap perkembangan intelektual siswa, maka semesta matematikanya semakin diperluas.

Contoh 48 (SD) (contoh keterbatasan semesta)

Operasi bilangan bulat pada Kurikulum 2004 di SD dibatasi pada operasi penjumlahan dan pengurangan saja. Operasi yang berlaku pada bilangan bulat lainnya, seperti perkalian, pembagian, dan perpangkatan tidak diberikan di SD.

Contoh 49 (SMP) (contoh keterbatasan semesta)

Sehubungan dengan keterbatasan semesta bilangan, di SMP belum diperkenalkan tentang bilangan imajiner atau kompleks. Hal ini juga berimplikasi pada penyelesaian soal matematika yang dibatasi pada himpunan bilangan real.

Contoh 50 (SD, SMP, SMA) (contoh keterbatasan semesta)

Di sekolah, bilangan prima dibatasi pengertiannya hanya pada bilangan asli. Siswa belum diperkenalkan pada perluasan semesta kepada bilangan prima negatif. Begitu pula topik geometri masih dibatasi pada geometri Euclid.

4. Tingkat keabstrakan.

Seperti pada poin sebelumnya, tingkat keabstrakan matematika juga harus menyesuaikan dengan tingkat perkembangan intelektual siswa. Di SD dimungkinkan untuk “mengkonkretkan” objek-objek matematika agar siswa lebih memahami pelajaran. Namun, semakin tinggi jenjang sekolah, tingkat keabstrakan objek semakin diperjelas.

Contoh 51 (SD) (contoh tingkat keabstrakan)

Dalam pembelajaran fakta mengenai bilangan di SD, siswa tidak langsung diperkenalkan simbol “2”, “3”, beserta sifat urutannya, tetapi dimulai dengan menggunakan benda-benda konkret dan menyuguhkan sifat urutan/relasi sebagai sifat “lebih banyak” atau “kurang banyak”.

Contoh 52 (SMP) (contoh tingkat keabstrakan)

Dalam membuktikan Teorema Pythagoras, siswa tidak langsung diarahkan pada bukti deduktif yang bersifat abstrak/formal dengan menggunakan lambang-lambang aljabar. Bukti secara geometris akan sangat membantu siswa memahami Teorema Pythagoras dan kebenarannya. Banyak sekali bukti Teorema Pythagoras secara geometris yang cukup menarik dan mudah dimengerti siswa.

Contoh 53 (SMA) (contoh tingkat keabstrakan)

Pembelajaran topik irisan bangun ruang semisal kubus atau piramida, maka penggunaan benda konkrit yang berbentuk kubus atau piramida akan sangat membantu siswa memahami bagaimana terjadinya suatu irisan dan sifat-sifat spasial (keruangan)nya.

BAB V

Penutup

A. Rangkuman

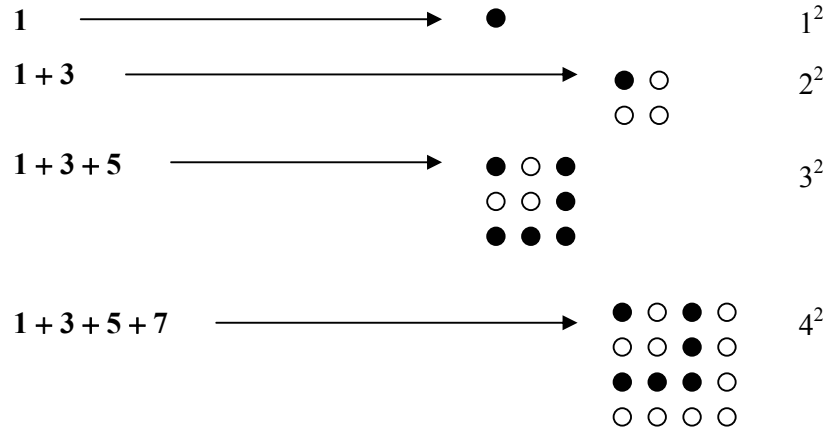
- ☞ Matematika bukanlah produk dari metode ilmiah, tetapi ia merupakan pengetahuan yang kebenarannya bersifat deduktif. Kebenaran matematika merupakan kebenaran koherensi atau konsistensi. Matematika dapat dipandang baik sebagai produk maupun proses berpikir tergantung pada aspek mana difokuskan.
- ☞ Karakteristik kultural matematika dapat dilihat pada tiga hal: (1) sejarah matematika, (2) evolusi matematika, dan (3) ethnomatematika. Implikasi penggunaan karakteristik kultural dalam pembelajaran matematika terdapat pada tiga aspek: (1) pemahaman (*understanding*), (2) antusiasme (*enthusiasm*), dan (3) keterampilan (*skills*).
- ☞ Karakteristik filosofis matematika dapat dilihat pada tiga aliran utama, yaitu formalisme, logisisme atau logikalisme, dan intuisiisme. Pengaruh landasan matematika dalam pembelajaran harus sesuai dengan tujuan pendidikan matematika.
- ☞ Deskripsi matematika bermacam-macam bentuknya, antara lain bahwa matematika dapat dipandang sebagai struktur yang terorganisir, alat, pola pikir deduktif, cara bernalar, bahasa artifisial, dan seni yang kreatif. Kedudukan matematika tersebut harus didudukkan dalam pembelajaran matematika secara proposional.
- ☞ Karakteristik umum matematika meliputi beberapa hal: (1) Memiliki objek kajian yang abstrak, berupa fakta, operasi (atau relasi), konsep, dan prinsip, (2) Bertumpu pada kesepakatan atau konvensi, baik berupa simbol-simbol dan istilah maupun aturan-aturan dasar (aksioma), (3) Berpola pikir deduktif, (4) Konsisten dalam sistemnya, (5) Memiliki simbol yang kosong dari arti, dan (6) Memperhatikan semesta pembicaraan.
- ☞ Karakteristik matematika sekolah dapat dilihat pada aspek: (1) penyajian, (2) pola pikir, (3) semesta pembicaraan, dan (4) tingkat keabstrakan.

B. Tugas dan Latihan

Untuk lebih memahami materi bahasan dalam paket ini, pembaca dapat mencoba tugas dan latihan di bawah ini (karena keterbatasan halaman, tidak disediakan kunci atau petunjuk jawaban).

1. **(SD, SMP, SMA).** Ungkapkan dengan kata-kata sendiri bagaimana implikasi aspek kultural matematika dalam pembelajaran matematika!
2. **(SD, SMP, SMA).** Carilah di beberapa literatur buku atau artikel, tentang biografi matematikawan Pythagoras, al-Khwarizmi, dan Descartes. Apa saja kontribusinya? Bagaimana implikasinya dalam pembelajaran?
3. **(SD, SMP).** Pernahkan Anda mendengar tentang *Luo-Shu*, yaitu susunan bilangan pada cangkang seekor kura-kura yang menunjukkan suatu Bujursangkar Ajaib 4×4 . Telusurilah tentang sejarahnya dan rancanglah bagaimana ia dapat digunakan untuk pembelajaran matematika.
4. **(SMA).** Zeno (sekitar 490 SM-430 SM) menyuguhkan sebuah soal yang dikenal sebagai soal *dikotomi* : Jika seseorang akan menempuh suatu jarak maka ia harus menempuh setengah dari jarak tersebut, lalu ia harus menempuh setengah dari jarak yang tersisa, begitu seterusnya. (Menurut Zeno, karena orang tidak mungkin menghabiskan seluruh waktu yang diperlukan, maka tidak ada orang yang dapat menempuh jarak tersebut)
Analisislah bagaimana soal di atas dapat diterapkan untuk pembelajaran limit barisan bilangan!
5. **(SMP, SMA).** Kemukakanlah beberapa ilustrasi tentang definisi fungsi. Kemudian, carilah sejarah perkembangan tentang definisi fungsi, dari konsep primitif hingga konsep modern.
6. **(SD).** Perhatikan bangunan candi Borobudur! (Anda bisa membayangkannya, bukan?). Aspek matematika apa saja yang dapat diungkap dari candi Borobudur dalam pembelajaran matematika?
7. **(SD, SMP, SMA).** Jelaskan yang menjadi asumsi aliran formalisme, aliran logikalisme, maupun aliran intuisionisme! Dan bagaimana ia mempengaruhi atau menjadi pola pikir seorang guru?

8. **(SD, SMP, SMA).** Seseorang memberi ilustrasi tentang matematika dengan mengatakan bahwa “matematika tidak lain adalah berhitung”. Bagaimana menurut Anda tentang pendapat tersebut?
9. Klasifikasikanlah objek-objek di bawah ini apakah termasuk fakta, konsep, operasi, atau prinsip. Serta kemukakan alasannya.
- (SD).** “lebih kecil”, “10”, “segiempat”, “<”, “pengurangan”, “KPK”, “dalil pythagoras”, “ $2 \times 2 \neq 22$ ”, “bilangan prima”, “luas”, “ $V = p \times l \times t$ ”, dan “ π ”
 - (SMP).** “simetri lipat”, “kongruen”, “faktor”, “ $3,14 \neq \frac{22}{7}$ ”, “limas segitiga”, “rumus euler”, “rata-rata”, “ $(-3) \times (-1) = 3$ ”, “ ΔABC ”, “ $A \subseteq B$ ”, “ruang sampel” dan “ $\sqrt{2} \approx 1,4$ ”.
 - (SMA).** “aturan sinus”, “ $\log 1 = 0$ ”, “titik”, “ $x^2 + y^2 = r^2$ ”, “persamaan kuadrat”, “cos”, “deret geometri”, “ $\int f(x) dx$ ”, “komplemen”, “ $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ ”, “dalil rantai”, dan “Teorema Bayes”.
10. **(SMP, SMA).** Carilah masing-masing dua buah contoh definisi analitik, definisi ginetik, dan definisi dengan rumus!
11. **(SMP, SMA).** Perhatikan definisi berikut: “jajargenjang adalah segiempat yang jumlah sudut-sudut sesisisi sama dengan 180° “. Definisi tersebut termasuk jenis definisi yang mana? Kemukakan pula minimal tiga buah kalimat definisi yang lain untuk “jajargenjang”!
12. **(SD, SMP, SMA).** Kesepakatan adalah tumpuan matematika. Contohnya para ahli sepakat menggunakan simbol “ π ” untuk menyatakan hasil bagi keliling dengan diameter lingkaran. Apabila ada siswa yang lebih senang menggunakan simbol yang lain, bagaimana Anda sebagai guru menyikapinya? Mengapa?
13. **(SMP, SMA).** Untuk membuktikan bahwa “jumlah n bilangan asli ganjil yang pertama sama dengan n^2 “. seorang siswa menggunakan cara geometris sebagai berikut:



sehingga dengan menggunakan pola geometris tersebut (persegi) dapat disimpulkan bahwa $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Apakah bukti di atas bersifat deduktif? Jika memang belum, bagaimana seharusnya? Bagaimana pula guru harus bersikap?

14. **(SMP, SMA)**. Sesuai kaidah matematika (deduktif), bagaimana membuktikan bahwa bilangan 41 adalah bilangan prima?
15. **(SD, SMP, SMA)**. Perhatikan karakteristik “konsisten dalam sistemnya” dengan karakteristik “memperhatikan semesta pembicaraan”. Menurut Anda apa persamaan dan perbedaannya? Mana yang lebih sering diterapkan di sekolah?
16. **(SD)**. Berikut contoh yang sering muncul dalam pembelajaran.
 Terhadap soal : $2 + 4 + 1 + 8 = \dots$, ada siswa yang menjawab dengan cara sebagai berikut: $2 + 4 = 6 + 1 = 7 + 8 = 15$. Menurut Anda apa yang salah dengan pengerjaan siswa tersebut? Apa kira-kira tindakan Anda sebagai guru untuk mencegah atau memperbaiki kesalahan siswa tersebut?
17. **(SD, SMP, SMA)**. Simbol matematika pada hakikatnya kosong dari arti. Tetapi apakah kita benar-benar dapat menerapkannya dalam pembelajaran matematika? Mengapa? Dan bagaimana seharusnya (hubungkan dengan pembelajaran kontekstual atau konstruktivis)?
18. Sesuai karakteristik matematika sekolah, renungkan dan carilah alternatif pembelajaran konsep-konsep yang disuguhkan di bawah ini agar siswa mendapat pengertian yang jelas.

- a. **(SD).** Siswa mungkin mudah untuk memahami $2 + 3$, tetapi agak sukar untuk memahami $2 + (-3)$, apalagi untuk $2 - (-3)$. Bagaimana guru mengawali pembelajaran tentang penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat?
- b. **(SMP).** Siswa mungkin tidak menemui hambatan dalam mencari rata-rata aritmetik, rata-rata geometrik, dan rata-rata harmonik suatu kumpulan bilangan, tetapi apakah mereka mengerti makna masing-masing jenis rata-rata tersebut? Untuk itu bagaimana melakukan pembelajaran tentang topik tersebut?
- c. **(SMA).** Integral adalah anti diferensial. Integral juga dapat dipandang sebagai jumlah luas. Menurut Anda, bagaimana pembelajaran integral di sekolah berkait dengan dua hal/pendekatan tersebut di atas?

Daftar Pustaka

- Ameron, Barbara van. 1999. *Arithmetic and Algebra: can history help to close the cognitive gap?* . dalam buku panduan Freudenthal Institute, Universitas Utrecht. Utrecht (Belanda): Universitas Utrecht. (lebih awal dalam *the proceedings of the Third European Summer University, Louvain-la-Neuve/Leuven*, Belgia, 15-21 Juli 1999)
- Anonim. 1985. *Ethnomathematics: What Might It Be?*. International Studi Group on Ethnomathematics (ISGEm). Diakses tanggal 14 Mei 2004 dari Ethnomathematics Digital Library (oleh Pacific Resources for Education and Learning) yang dipublikasi kembali tahun 2003 dalam <http://www.ethnomath.org/resources/ISGEm/022.htm>
- Bell, Eric Temple. 1987. *Mathematics, Queen & Servant of Science*. Washington: Tempus Books of Microsoft Press.
- Boyer, Carl B. 1968. *A History of Mathematics*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Courant, Richart & Robbins, Herbert. 1981. *What is Mathematics, An Elementary Approach To Ideas and Methods*. New York: Oxford University Press.
- Dali S. Naga. 1980. *Berhitung, Sejarah dan Perkembangannya*. Jakarta: Gramedia
- D'Ambrosio, Ubiratan. 2002. *Ethnomathematics: An Overview*. Makalah yang disampaikan pada *the II Congresso Internacional de Etnomatemática*, 5 - 7 Agustus 2002 di Ouro Preto, MG, Brazil. dalam <http://www.geocities.com/pluriversu/ethno.html> (diakses 14 Mei 2004).
- Eves, Howard. 1964. *An Introduction to The History of Mathematics*. New York: Holt, Rinehart, & Winston, Inc.
- Fauvel, John. 2000. *The Role of History of Mathematics Within a University Mathematics Curriculum for the 21st century*. dalam <http://www.bham.ac.uk/ctimath/talum/newsletter/>. London: The Mathematical Association.
- Gravemeijer, K. 1994. *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht (Belanda): CDβ Press. (devisi penerbitan Utrecht Institute, Utrecht University).
- Jujun S. Suriasumantri. 2002. *Filsafat Ilmu, Sebuah Pengantar Populer*. Jakarta: Pustaka Sinar Harapan.
- O'Connor, J. J. & Robertson, E. F. 1999. kumpulan esai dalam <http://www-history.mcs.st-andrew.ac.uk/history/HistTopic/> & dalam <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematics/>

- Resnick, Lauren B. & Ford, Wendy W. 1981. *The Psychology of Mathematics for Instruction*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers
- Rubenstein, Rheta N. & Thompson, Denisse R. 2001. "Learning Mathematical Symbolism: Challenges and Instructional Strategies" dalam *Mathematics Teacher* Volume 94 Number 4 (April 2001): 265 – 271. Reston, Virginia (VA): NCTM
- Smith, Sanderson, M. *What is Mathematics?*. 2003 (diakses). dalam <http://www.cs.appstate.edu/~sjg/class/1010/mathematician/ids2.html>
- Soedjadi. 2000. *Kiat Pendidikan Matematika, Konstataasi keadaan masa kini menuju harapan masa depan*. Jakarta: Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi.
- Soeharjo. 2000. *Aksiomatik*. Surakarta: Program Pascasarjana, Universitas Sebelas Maret.
- Sumaji, dkk. 1998. *Pendidikan Sains yang Humanistik*. Yogyakarta: USD dan Kanisius
- Sumardyono. 2003. *Sejarah Topik Matematika Sekolah*. Paket Pembinaan Penataran. Yogyakarta: PPPG Matematika.
- The Liang Gie. 1984. *Filsafat Ilmu*. Yogyakarta: Supersukses.
- The Liang Gie. 1985. *Filsafat Matematika*. Yogyakarta: Supersukses.
- Wilder, Raymond L. 1981. *Mathematics as A Cultural System*. New york: Pergamon Press