PELATIHAN INSTRUKTUR/PENGEMBANG SMU
TANGGAL 28 JULI s.d. 10 AGUSTUS 2003

# SUKU BANYAK

**Oleh:**

**Fadjar Shadiq, M.App.Sc.**

**DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL**
**DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH**
**PUSAT PENGEMBANGAN PENATARAN GURU (PPPG) MATEMATIKA**
**YOGYAKARTA**
**2003**

## BAGIAN 1
## PENGERTIAN SUKUBANYAK

Adalah Rene Descartes yang memperkenalkan penggunaan huruf-huruf awal alfabet a, b, c, …, untuk menyatakan konstanta, serta penggunaan huruf-huruf akhir alfabet , …, x, y, z untuk menyatakan peubah (variabel). *"To this excellent custom we shall adhere."* Untuk aturan yang sangat bagus ini, seharusnya kita mengikutinya, tulis Abraham dan Gray (1971:388). Pada masa sekarang, untuk penggunaan simbol-simbol yang lebih banyak dari huruf-huruf pada alfabet, dapatlah digunakan indeks seperti $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, …, $a_k$, $a_{k+1}$, …, $a_n$.

**<u>Bentuk Umum Sukubanyak</u>**

Jika $a_0$, $a_1$, $a_2$, …,$a_n$. merupakan n + 1 bilangan (bisa real dan bisa juga kompleks), maka bentuk umum sukubanyaknya adalah:
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^n + a_1x + a_0$.
Berikut ini adalah beberapa istilah penting:

- Bentuk aljabar $a_k x^k$ disebut suku.
- $a_k$ disebut koeffisien $x^k$
- Koeffisien dari x dengan pangkat tertinggi disebut dengan koeffisien utama *(leading coeffisien)*.
- $a_0$ disebut konstanta.
- Untuk $a_n \neq 0$ maka sukubanyak tersebut berderajat n.

<u>Contoh.</u>

1. $P(x) = 2x^{17} - 5$ adalah sukubanyak berderajat 17, koeffisien utamanya 2, konstantanya adalah – 5, dan koeffisien $x^{15}$ adalah 0

2. $P(x) = x$ adalah sukubanyak berderajat 1, koeffisien utamanya 1, dan konstantanya juga 0.

3. $P(x) = 5$ adalah sukubanyak berderajat 0.

4. $P(x) = 0$ adalah sukubanyak 0, dan tidak memilik derajat.

**<u>Penjumlahan dan Perkalian Sukubanyak</u>**

Jika $P(x) = 2x + 3$ dan $Q(x) = 3x - 5$; maka

a. $P(x) + Q(x) = (2x + 3) + (3x - 5) = 5x - 2$

b. $P(x)\,Q(x) = (2x + 3)(3x - 5)$
$\qquad\qquad = 6x^2 - x - 15$

Secara umum jika:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0$

$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \dots + b_0$
dan n>m, maka:

$P(x) + Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + (a_m + b_m)\, x^m + (a_{m-1} + b_{m-1})\, x^{m-1} + \dots + (a_0 + b_0)$

$P(x)\ Q(x) = a_n\ b_m x^{m+n} + (a_n\ b_{m-1} + a_{n-1}\ b_m)x^{m+n-1} + \dots + (a_0 b_2 + a_1 {}_1 + a_2 b_0)x^2 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + a_0 b_0$

Jika P(x) = 2x + 3 sedangkan Q (x) = 3x – 5, maka pengerjaannya dapat dilakukan sebagai berikut:

Di samping dengan mengerjakan seperti: $(3x - 5)(2x + 3) = 6x^2 + 9x - 10x - 15$
$= 6x^2 - x - 15$

Cara lainnya adalah dengan perkalian bersusun berikut:

$$
\begin{array}{rl}
2x + 3 & \\
3x - 5 & \\
\hline
-10x - 15 & \times \\
6x^2 + 9x \phantom{- 15} & \\
\hline
6x^2 - x - 15 & +
\end{array}
$$

Pengerjaan tersebut dapat disederhanakan menjadi berikut:

| $x^2$ | $x^1$ | $x^0$ |
|---|---|---|
| | 2<br>3 | 3<br>–5 |
| <br>6 | –10<br>9 | –15 |
| 6 | –1 | –15 |

Perkalian di atas merupakan perkalian bersusun tanpa mengikutkan variabel (peubah) x-nya. Hasil perkaliannya adalah sama dengan dua cara di atas, yaitu $6x^2 - x - 15$.

## Latihan 1

1. Susunlah suatu sukubanyak $P(x)$ berderajat 3 dengan koeffisien utama juga 3 dan dengan konstanta –7.

2. Tentukan koeffisien $x$ pada $(x - 5)(x - 7)$. Cobalah untuk tidak menjabarkan bentuk tersebut.

3. Jabarkan $(a_2x^2 + a_1x + a_0)\,(b_2x^2 + b_1x + b_0)$

4. Jabarkan lalu sederhanakan
   $[x^3 - (x_1 + x_2 + x_1)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3][x - x_4]$

5. Kalikan yang berikut bersusun tanpa mengikutkan peubah $x$-nya.
   a. $(3x - 4)(x^3 + 2x^2 - 3x + 5)$
   b. $(x^2 - 3x + 5)(\, x^2 + 3x - 4)$
   c. $(1 + 2x + 3x)^2$
   d. $(1 + 2x + 3x)^3$

## BAGIAN 2

**NILAI SUKUBANYAK**

Nilai suatu suku banyak dapat ditentukan dengan dua cara, yaitu dengan cara substitusi dan cara skema (skematik).

a. Cara substitusi

Dengan cara substitusi ini, nilai suatu suku banyak ditentukan dengan mengganti (mensubstitusi) setiap peubah atau variabelnya dengan suatu konstanta a. Dengan demikian, nilai suku banyak akan sangat bergantung kepada konstanta a yang akan menggantikan x. Jika sukubanyaknya dinyatakan dalam P(x), maka nilai sukubanyak P(x) untuk x = a adalah P(a).

Contoh:

Jika $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$, maka nilai suku banyak itu untuk x=1 adalah:

$$\begin{aligned} P(1) &= 2(1)^3 - 3(1)^2 + 4, \\ &= 2 - 3 + 4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

b. Cara skematik

Jika $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$, maka nilai suku banyak itu untuk x=k adalah:

$$\begin{aligned} P(k) &= 2k^3 + 3k^2 + 4k + 5 \\ &= (2k^2 + 3k^1 + 4)k + 5 \\ &= \{(2k + 3)k + 4\}k + 5 \end{aligned}$$

Perhatikan bentuk terakhir P(k) ini lalu bandingkan dengan P(x) di mana 2 merupakan koefisien $x^3$, 3 merupakan koefisien $x^2$, 4 merupakan koefisien x, dan yang terakhir 5 merupakan suku tetap suku banyak itu. Untuk memudahkan, perhatikan tabel ini.

| | $x^3$ | $x^2$ | $x^1$ | $x^0$ |
|---|---|---|---|---|
| Koefisien | 2 | 3 | 4 | 5 |

Perhatikan sekali lagi bentuk terakhir $P(k) = \{(2k + 3)k + 4\}k + 5$. Bentuk terakhir ini menunjukkan bahwa cara atau proses menentukan nilai suku banyak P(x) untuk x = k adalah sebagai berikut:

1. Kalikan koefisien $x^3$ (yaitu 2) dengan k sehingga didapat 2k
2. Tambahkan hasil pada langkah 1 tadi dengan koefisien $x^2$ (yaitu 3) sehingga didapat 2k+3
3. Kalikan hasil pada langkah 2 tadi dengan k sehingga didapat (2k+3)k
4. Tambahkan hasil pada langkah 3 tadi dengan koefisien x (yaitu 4) sehingga didapat {(2k+3)k + 4}
5. Kalikan hasil pada langkah 4 tadi dengan k sehingga didapat {(2k+3)k + 4}k
6. Tambahkan hasil pada langkah 5 tadi dengan suku tetapnya (yaitu 5) sehingga didapat {(2k+3)k + 4}k + 5 yang merupakan nilai sukubanyak P(x) untuk x = k.

Dari yang dijelaskan di atas nampaklah bahwa ada beberapa kegiatan yang selalu dilakukan, yaitu:

1. Mengalikan dengan k koefisien peubah dengan pangkat tertinggi.
2. Menambahkan hasilnya kepada koefisien peubah dengan pangkat tertinggi berikutnya.
3. Mengalikan dengan k hasil yang didapat pada langkah 2.
4. Mengulangi langkah ke-2 sampai peubahnya berpangkat 0.

Berdasar keterangan di atas dapatlah ditentukan nilai suku banyak P(x) untuk x = 1 misalnya dengan cara skematik sebagai berikut:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Koefisien x | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| ↗ berarti dikalikan 1 | | 2 | 5 | 9 | |
| | 2 | 5 | 9 | 14 | P(1) |

Hasil tersebut dapat dicek dengan menggunakan cara substitusi, yaitu:

$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$
$P(1) = 2 + 3 + 4 + 5$
$\quad\;\; = 14$

**Latihan 2.**

1. Tentukan nilai sukubanyak berikut dengan menggunakan dua cara, yaitu cara substitusi dan cara skematik:
   a. $P(x) = x^2 – 3x + 4$ untuk $x = 2$
   b. $P(x) = x^5 – 6x + 5$ untuk $x = 1$
2. Sukubanyak $P(x) = 3x^4 – 5x + q$ bernilai 12 untuk $x = 3$. Tentukan nilai q yang memenuhi.
3. Ada dua orang yaitu A dan B menghitung nilai dari $3x^3 + 4x^2 – 7x + 8$ untuk $x = 2,7$ sebagai berikut:
   A menggunakan cara substitusi
   B menggunakan cara skematik
   Cara mana yang lebih sedikit menggunakan perhitungan aritmetika?

## BAGIAN 3
## PEMBAGIAN SUKUBANYAK

1. Gunakan pembagian berekor untuk menentukan hasil bagi dan sisa dari 667:4

$$
\begin{array}{r|l}
 & \ldots \\ \hline
4 & 6\ \ 6\ \ 7 \\
 & \underline{\ldots\qquad\quad} \\
 & \ \ \ldots.. \\
 & \underline{\ \ \ldots..\qquad} \\
 & \qquad \ldots
\end{array}
$$

   a. Tentukan:
      - Pembaginya.
      - Yang dibagi.
      - Hasil baginya.
      - Sisa pembagiannya.

   b. Bagaimana cara Anda mengecek kebenaran jawaban Anda tadi.

   c. Nyatakan pembagian di atas dalam bentuk:

| Yang Dibagi | = | Pembagi | × | Hasil | + | Sisa |
|---|---|---|---|---|---|---|
|  | = |  | × |  | + |  |

2. Gunakan pembagian berekor untuk menentukan hasil bagi dan sisa dari $3x^3 - 2x^2 + 4x - 7$ jika dibagi oleh $x - 1$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \qquad\quad \ldots \\ \hline
x - 1. & 3x^3 \ \ - 2x^2 \ + \ 4x \ \ - 7 \\
 & \underline{\quad \ldots \qquad\qquad\qquad} \ - \\
 & \qquad\qquad\quad \ldots \\
 & \underline{\qquad\qquad\quad \ldots \qquad} \ - \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad \ldots
\end{array}
$$

   a. Tentukan:
      - Pembaginya.
      - Yang dibagi.
      - Hasil baginya.
      - Sisa pembagiannya.

b. Bagaimana cara Anda mengecek kebenaran jawaban Anda tadi.
c. Nyatakan pembagian di atas dalam bentuk:

| Yang Dibagi | = | Pembagi | × | Hasil | + | Sisa |
|---|---|---|---|---|---|---|
|  | = |  | × |  | + |  |

Perhatikan sekali lagi pembagian soal 2 di atas. Jika hanya koefisien yang dituliskan, pembagian tersebut dapat disederhanakan menjadi:

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
 & 3 & 1 & 5 & & \\
\hline
-1 & 3 & -2 & +\ 4 & -7 & \\
 & 3 & -3 & & & - \\
\hline
 & & 1 & 4 & & \\
 & & 1 & -1 & & - \\
\hline
 & & & 5 & -7 & \\
 & & & 5 & -5 & - \\
\hline
 & & & & \boxed{-2} & \text{sisa}
\end{array}
$$

Dengan mengeliminasi bilangan yang hanya menyalin dari yang ada diatasnya (lihat bilangan yang dilingkari di atas), akan didapat:

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
 & 3 & 1 & 5 & & \\
\hline
-1 & 3 & -2 & +\ 4 & -7 & \\
 & 3 & -3 & & & - \\
\hline
 & & 1 & -1 & & - \\
\hline
 & & & 5 & -5 & - \\
\hline
 & & & & -2 &
\end{array}
$$

Dengan mengganti pengurangan dengan penambahan, untuk memudahkan mengoperasikan akan didapat:

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
\hline
+1 & 3 & -2 & +\ 4 & -7 & \\
 & 3 & 3 & & & + \\
\hline
 & & 1 & 1 & & + \\
\hline
 & & & 5 & +5 & + \\
\hline
 & & & & -2 &
\end{array}
$$

Dengan menggeser bagian bawah ke atas, lihat tanda panah di atas, akan didapat:

$$
\begin{array}{c/rrrr}
1 & 3 & -2 & +4 & -7 \\
 & & 3 & 1 & 5 \\
\hline
 & 3 & 1 & 5 & \multicolumn{1}{|r}{-2} \\
\cline{5-5}
\end{array}
$$

Bentuk di atas sangat mirip dengan pembagian sintetis (skema) atau bagan di bawah ini.

$$
\begin{array}{c|rrrr}
1 & 3 & -2 & +4 & -7 \\
 & & 3 & 1 & 5 \\
\hline
 & 3 & 1 & 5 & \multicolumn{1}{|r}{-2} \\
\cline{5-5}
\end{array}
$$

Ternyata hasil baginya terletak pada baris terbawah yaitu $3x^2 + x + 5$ sedangkan sisanya adalah $f(1) = -2$

Jadi, $3x^3 - 2x^2 + 4x - 7 = (x - 1)(3x^2 + x + 5) - 2$

Cara di atas dapat digunakan hanya jika pembaginya dalam bentuk $x - k$. Sedangkan untuk pembagi dalam bentuk $a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ dapat digunakan cara pembagian bersusun biasa.

<u>Latihan.</u>

Tentukan hasil bagi dan sisa untuk:

1. $x^5 - x^3 + 1$ dibagi $x - 1$ dengan 2 cara.
2. $x^5 - x^4 + 1$ dibagi $x + 1$ dengan 2 cara.
3. $x^5 - x^3 + 1$ dibagi $x^2 - x + 1$
4. $x^4 - x^2 + 1$ dibagi $x^2 + x\sqrt{3} + 1$.
5. $x^2 + ax + b$ dibagi $x - k$.

**BAGIAN 4**
**TEOREMA SISA**

Sudah dibahas di depan bahwa 7:2 akan menghasilkan 3 dan sisa 1. Dengan demikian 7 = $2 \times 3 + 1$. Secara umum dapat dinyatakan bahwa:

| |
|---|
| Yang dibagi = Pembagi × Hasil Bagi + Sisa |

Jika yang dibagi adalah suku banyak P(x), pembaginya adalah x – k, hasilnya adalah h(x) dan sisanya adalah s maka akan didapat:

| |
|---|
| $P(x) = (x - k).h(x) + s$ |

Untuk x = k, akan didapat:

$$P(k) = (k - k).h(x) + s$$
$$P(k) = 0.\ h(x) + s$$
$$P(k) = s$$

Karena P(k) adalah nilai suku banyak untuk x = k dan s = sisa, maka bentuk terakhir ini menunjukkan bahwa nilai P(x) untuk x = k adalah sama dengan sisa pembagian P(x) oleh (x – k).
Teorema atau Dalil Sisa.

| |
|---|
| Jika suku banyak P(x) berderajat n dibagi oleh (x – k), maka sisanya adalah S = P(k) |

**Latihan 4**

1. Tunjukkan kebenaran teorema sisa dengan menggunakan:
   a. $(x^2 - 5x + 6) : (x - 3)$
   b. $(2x^4 + 3x^2 - 4x + 7) : (x + 2)$

2. Tentukan hasil bagi h(x) jika $x^5 - 5 \times 4$ dibagi x – 1, dan tunjukkan bahwa h(x) juga habis dibagi x – 1

3. Tentukan bilangan cacah k agar $x^k + x^{k-1} + \dots + x^2 + x + 1$ habis dibagi x – 1

4. Suku banyak $P(x) = 2x^3 + px^2 - 6x + 7$ dan suku banyak $Q(x) = 3x^2 - 6x + 7$ akan memiliki sisa yang sama jika dibagi x – 1. Tentukan nilai p.

5. Suku banyak $P(x) = x^3 + px^2 - 2x - 1$ akan bersisa 0 jika dibagi (x + 1). Tentukan nilai p.

6. Jika $kx + l$ merupakan sisa dari $P(x)$ jika $(x - a)(x - b)$, dengan $a \neq b$, maka tunjukkan bahwa $k = \dfrac{P(b) - P(a)}{b - a}$. Tentukan juga bentuk aljabar untuk l.
7. Tentukan bilangan real a agar $x^3 + 3ax - 9$ habis dibagi $x - a - 1$.
8. Jika $P(x)$ dibagi $x^2 - 3x + 2$ akan bersisa $4x - 2$. Tentukan sisanya jika $P(x)$ dibagi $x - 1$. Tentukan juga jika $P(x)$ dibagi $x - 2$.
9. Suatu sukubanyak $P(x)$ jika dibagi $x + 1$ akan bersisa 5, dan jika dibagi $x - 4$ akan bersisa $-5$. Tentukan sisanya jika dibagi $(x + 1)(x - 4)$.
10. Buktikan dengan induksi matematika identitas berikut:
    $x^n - k^n = (x - k)(x^{n-1} + x^{n-2}k + x^{n-3}k^2 + \dots + k^{n-1})$
11. Tentukan hasil bagi dan sisanya, dengan cara pembagian biasa soal berikut:
    a. $2x^2 - 3x + 2$ dibagi $(2x - 1)$
    b. $6x^3 - x^2 + 5x - 4$ dibagi $(3x + 1)$
12. Pada soal di atas, dapatkah Anda menyelesaikan soal tersebut dengan cara skematik? Mengapa demikian? Jelaskan alasan Anda.

## BAGIAN 5
## TEOREMA FAKTOR

Sudah dibahas bagian depan bahwa $P(x) = (x - k)\,h(x) + s$, sehingga $P(k) = s$.

Jika $s = P(k) = 0$ maka $(x - k)$ disebut faktor dari $P(x)$. Dengan demikian, didapat teorema faktor berikut:

> Jika $P(x)$ merupakan suatu suku banyak; $(x - k)$ merupakan faktor dari $P(x)$ jika dan hanya jika $P(k) = 0$

Teorema di atas menunjukkan dua hal:

a) Jika $(x - k)$ merupakan faktor dari $P(x)$ maka $f(k) = 0$

b) Jika $f(k) = 0$ maka $(x - k)$ merupakan faktor dari $P(x)$

> Jika $P(x)$ merupakan suatu suku banyak; dan $l(x)$ merupakan faktor dari $P(x)$ jika dan hanya jika sisa pembagian $P(x)$ oleh $l(x)$ adalah 0

**<u>Latihan:</u>**

1. Tentukan suku banyak $P(x) = ax^2 + bx + c$ yang memiliki faktor $(x + 2)$ dan $(2x - 1)$ serta memiliki nilai 6 untuk $x = 2$
2. Tentukan hasil bagi dan sisanya jika $2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x - 4$ dibagi $(x - 1)(x + 2)$.
3. Tentukan suku banyak $P(x) = ax^2 + p(x) + c$ yang memiliki faktor $x + 1 = 0$ dan $x - 3 = 0$ serta memiliki nilai maksimum 16.
4. Tentukan nilai b dan c jika $x^2 + x$ merupakan faktor dari $2x^3 + bx^2 + cx - 4$.
5. Tentukan nilai p dan q jika $(x - 3)^2$ merupakan faktor dari $2x^3 - 11x^2 + px + q$.
6. Jika $(x - k)^2$ adalah faktor dari $x^3 + 3px + q$, buktikan bahwa $4p^3 + q^2 = 0$. Tentukan faktor lainnya.
7. Gunakan cara skema (skematis) untuk menentukan hasil dan sisanya jika:
   a. $x^5 + 2x$ dibagi $(x - 1)(x - 2)$
   b. $x^6$ dibagi $(x - 2)^2$

## BAGIAN 6
## RUMUS VIETA

Pada materi pokok atau pokok bahasan Persamaan Kuadrat (PK) telah dibahas bahwa jika $x_1$, dan $x_2$ merupakan akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bc + c = 0$, maka $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$ dan $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. Pembuktian untuk hal tersebut adalah sebagai berikut:

Karena $x_1$ dan $x_2$ merupakan akar-akar persamaan kuadrat tersebut, didapatlah:

$$a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) \equiv a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\equiv a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2)$$

$$\text{sehingga} : -(x_1 + x_2) = \frac{b}{a} \quad \text{atau} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \,.\, x_2 = \frac{c}{a}$$

Jika digunakan notasi :

$a_2x^2 + a_1x + a_o = a_2\ (x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_o}{a_2}) = a_2(x - x_1)(x - x_2)$, dan akan didapat

$$x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{a_0}{a_2}$$

Jika proses seperti itu dilanjutkan untuk persamaan pangkat tiga, akan didapat

$$a_3\left(x^3 + \frac{a_2}{a_3}x^2 + \frac{a_1}{a_3}x + \frac{a_o}{a_3}\right) = a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$= a_3[\ x^3 (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3\ ]$$

sehingga didapat

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = +\frac{a_1}{a_3}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{a_o}{a_3}$$

Dengan cara yang sama, untuk persamaan pangkat empat $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_o$ akan didapat:

$$a_4\left(x^4 + \frac{a_3}{a_4}x^3 + \frac{a_2}{a_4}x^2 + \frac{a_1}{a_4}x + \frac{a_o}{a_4}\right) \equiv$$

$$a_3\left[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3\right][x - x_4] \equiv$$

$$a_3\left[x^4 - (x_1 + x_2 + x_3 + a_4)x^3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4)\right]$$

$-(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)x + x_1x_2x_3x_4]$

sehingga dapat disimpulkan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{a_3}{a_4}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{a_2}{a_4}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{a_1}{a_4}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{a_o}{a_4}$$

Perhatikan hasil-hasil di atas ada keteraturan-keteraturan pada hasil-hasil di atas. Dapatkah Anda sekarang menduga hasilnya untuk persamaan pangkat lima?

Gunakan langkah seperti langkah di atas. Jika $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ dan $x_5$ merupakan akar dari $a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ isilah titik-titik di bawah ini.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \ldots.$

$x_1x_2 + \ldots \qquad = \ldots.$

$x_1x_2x_3 + \ldots \qquad = \ldots.$

$x_1x_2x_3x_4 + \ldots. \qquad = \ldots.$

$x_1x_2x_3x_4x_5 = \ldots.$

Untuk memudahkan para siswa, perhatikan contoh berikut.

1. Pada persamaan $ax^2 + bx + c = 0$, akan didapat $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ dan $x_1 + x_2 = \frac{c}{a}$
2. Pada persamaan pangkat tiga $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ akan didapat

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

3. Pada persamaan pangkat empat $2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6 = 0$ akan didapat.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\left(\frac{5}{2}\right) = -2\frac{1}{2}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{6}{2} = 3$$

4. Pada persamaan kubik $x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$, jika a, b, dan c adalah akar-akarnya, maka tentukan nilai $a^2 + b^2 + c^2$.

Jawab:

$a + b + c = -(-2) = 2$

$ab + ac + bc = 3$

$abc = (-5) = 5$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$, atau

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) \\ &= 2 \times 2 - 2 \times 3 \\ &= -2 \end{aligned}$$

**Latihan**

1. Jika a, b, dan c adalah akar-akar persamaan kubik $2x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ maka tentukan nilai dari:
   a. $a^2 + b^2 + c^2$
   b. $a^3 + b^2 + c^3$
   c. $a^4 + b^4 + c^4$

2. Misalkan a, b dan c adalah akar-akar persamaan $x^3 + qx + r = 0$. Buktikan bahwa $(a - b)^2 = \dfrac{c^3 + 4r}{c}$

3. Akar-akar persamaan kubik $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ adalah a, b dan c. Nyatakan bentuk-bentuk di bawah ini dalam p, q dan r.
   a. $a^2 + b^2 + c^2$
   b. $a^3 + b^3 + c^3$
   c. $a^4 + b^4 + c^4$

4. Akar-akar persamaan kubik $x^3 + px^2 \; qx + r = 0$ adalah a, b, dan c. Susunlah persamaan kubik baru yang akar-akarnya adalah:
   a. $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$
   b. $a + 2, b + 2, c + 2$
   c. $a^2$, $b^2$, dan $c^2$

5. Jika a dan b adalah akar-akar positif dari $x^3 + m = 3nx$, tunjukkanlah bahwa terdapat hubungan:

   $n = a^2 + ab + b^2$

   $m = a^2b + ab^2$

# BAGIAN 7
## PERSAMAAN SUKU BANYAK

Persamaan umum suku banyak adalah $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ dengan $a_n \neq 0$. Persamaan tersebut disebut berderajat n dan maksimal banyaknya akar-akar persamaan tersebut adalah n.

Misalkan $a_i$ merupakan bilangan bulat (i = n, n – 1, n – 2, … , 3, 2, 1, 0) dan salah satu akarnya adalah $x_1 = k$ yang merupakan bilangan bulat, sehingga didapat:

$$P(k) = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + a_{n-2} k^{n-2} + \dots a_1 k + a_0 = 0; \text{ atau}$$

$$a_0 = k(-a_n k^{n-1} - a_{n-1} k^{n-2} - a_{n-2} k^{n-3} - \dots a_2 k - a_1)$$

Dengan demikian, berdasar bentuk di atas bahwa k merupakan faktor dari $a_0$.
Kesimpulannya, jika suatu persamaan polinom dengan kontanta serta koefisiennya merupakan bilangan bulat, dan jika persamaan tersebut mempunyai faktor bulat, maka akar tersebut merupakan faktor bulat dari konstantanya.

**Contoh**
Tentukan akar-akar persamaan suku banyak $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

**Jawab**
Sebagaimana dijelaskan di atas, akar bulat yang mungkin adalah faktor dari $A_o = 6$. Faktor bulat dari 6 sendiri adalah ± 1, ± 2, ± 3, ± 6. Dengan menggunakan pembagian sintetik (skematik) akan didapat akar bulat tersebut.
Cara ini dilakukan dengan mencoba faktor bulat 6 tadi satu persatu. Jika didapati sisa pembagiannya adalah 0, maka akan dihasilkan salah satu faktornya. Sekarang yang akan dicoba adalah jika suku banyak P(x) dibagi x – 1 dengan cara skematik berikut:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | –2 | –5 | 6 |
| k = 1 | | 1 | –1 | 6 |
| | 1 | –1 | –6 | $\boxed{0}$ |

Karena sisianya 0, maka (x – 1) merupakan salah satu faktor sukubanyak tersebut serta 1 adalah akar persamaan tersebut, sehingga didapat:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$(x-1)(x^2 - x - 6) = 0$$
$$(x-1)(x-3)(x+2) = 0$$

Jadi akar-akar persamaan tersebut adalah –2, 1, dan 3.

## Latihan 7

1. Jika suatu suku banyak P(x) memiliki koeffsien serta konstanta bulat, dan juga memiliki akar rasional $\frac{r}{s}$ dengan $r/s$ merupakan bentuk paling sederhana serta r dan s merupakan bilangan bulat; tunjukkanlah bahwa
    - r merupakan faktor dari $a_o$ dan
    - s merupakan faktor dari $a_n$

2. Tentukan seluruh akar rasional dari:

    a) $x^3 - 7x + 6$
    b) $x^3 - x^2 - 5x + 6$
    c) $2x^3 - 3x^2 - 11 + 6$
    d) $6x^3 + 13x^2 - 4$

## Latihan Ulangan

1. Diketahui suku banyak $f(x)$ jika dibagi $(x + 1)$ bersisa 8 dan dibagi $(x - 3)$ bersisa 4. Suku banyak $g(x)$ jika dibagi $(x + 1)$ bersisa $-9$ dan jika dibagi $(x - 3)$ bersisa 15. Jika $h(x) = f(x)\ g(x)$, maka tentukan sisa pembagian $h(x)$ oleh $(x^2 - 2x - 3)$.

2. Suku banyak $6x^3 + 13x^2 + qx + 12$ mempunyai faktor $(3x - 1)$. Tentukan faktor linear yang lain.

3. Suku banyak $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 6x + k$ habis dibagi $(x - 2)$. Carilah sisa pembagian $P(x)$ oleh $x^2 + 2x + 2$.

4. Akar-akar persamaan $x^3 - 4x^2 + x - 4 = 0$ adalah $x_1$, $x_2$, dan $x_3$. Hitunglah nilai $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

5. Suatu suku banyak $P(x)$ dibagi oleh $(x^2 - 1)$ sisanya $(12x - 23)$ dan jika dibagi oleh $(x - 2)$ sisanya 1. Tentukan sisa pembagian suku banyak oleh $(x^2 - 3x + 2)$.

6. Salah satu akar persamaan $x^4 + px^3 + 7x^2 - 3x - 10 = 0$ adalah 1. Hitunglah jumlah akar-akar persamaan tersebut.

7. Suatu suku banyak $F(x)$ dibagi oleh $(x - 2)$ sisanya 8, dan jika dibagi $(x + 3)$ sisanya $-7$. Carilah sisa pembagian suku banyak $F(x)$ oleh $x^2 + x - 6$.

## Daftar Pustaka


Abrahamson, D; Gray, M.C (1971). *The Art of Algebra*. Adelaide: Rigby Limited.

Krismanto, A (1998). *Persamaan dan Pertidaksamaan Absolut serta Persamaan Polinom.* Yogyakarta: PPPG Matematika

Wirodikromo, Sartono (2000). *Matematika 2000.* Jilid 7. Jakarta: Erlangga