

Bab I

Pendahuluan

A. Latar Belakang

Secara etimologis, logika berasal dari kata Yunani '*logos*' yang berarti kata, ucapan, pikiran secara utuh, atau bisa juga berarti ilmu pengetahuan (Kusumah, 1986). Dalam arti luas, logika adalah suatu cabang ilmu yang mengkaji penurunan-penurunan kesimpulan yang sah (*valid*, *correct*) dan yang tidak sah (*tidak valid*, *incorrect*). Proses berpikir yang terjadi di saat menurunkan atau menarik kesimpulan dari pernyataan-pernyataan yang diketahui benar atau dianggap benar itu biasanya disebut dengan penalaran (*reasoning*).

Logika, penalaran, dan argumentasi sangat sering digunakan di dalam kehidupan nyata sehari-hari, di dalam mata pelajaran matematika sendiri maupun mata pelajaran lainnya. Karenanya, Logika Matematika ini sangat berguna bagi siswa, karena di samping dapat meningkatkan daya nalar, namun dapat langsung diaplikasikan di dalam kehidupan nyata mereka sehari-hari maupun ketika mempelajari mata pelajaran lainnya. Tujuan pembelajaran Logika Matematika pada dasarnya adalah agar para siswa dapat menggunakan aturan-aturan dasar Logika Matematika untuk penarikan kesimpulan.

B. Tujuan

Modul ini disusun dengan maksud untuk memberikan tambahan pengetahuan bagi guru SMK yang sedang mengikuti diklat, dengan harapan dapat digunakan sebagai salah satu sumber untuk memecahkan masalah-masalah pembelajaran Logika Matematika dan dapat digunakan juga sebagai bahan pengayaan wawasan para guru.

C. Ruang Lingkup

Pembahasan pada modul ini lebih menitik-beratkan pada pengertian pernyataan, nilai kebenaran suatu pernyataan tunggal dan majemuk; pengertian dan nilai kebenaran konvers, invers, dan kontraposisi dari suatu implikasi;

membahas hukum atau rumus yang berkaitan dengan logika; serta membahas penarikan kesimpulan yang sah dan yang tidak sah.

Setiap bagian modul ini dimulai dengan teori-teori, diikuti beberapa contoh dan diakhiri dengan latihan. Di samping itu, dikemukakan juga tentang hal-hal penting yang perlu mendapat penekanan para guru di saat membahas pokok bahasan ini di kelasnya. Karenanya, para pemakai modul ini disarankan untuk membaca lebih dahulu teorinya sebelum mencoba mengerjakan latihan yang ada. Jika para pemakai modul ini mengalami kesulitan maupun memiliki saran, sudi kiranya menghubungi PPPG Matematika, Kotak Pos 31 YKBS, Yogyakarta.

Bab II

Pernyataan Tunggal dan Majemuk serta Negasinya

Kebenaran suatu teori yang dikemukakan setiap ilmuwan, matematikawan, maupun para ahli merupakan hal yang akan sangat menentukan reputasi mereka. Untuk mendapatkan hal tersebut, mereka harus menyusun pernyataan yang bernilai benar. Di samping itu, mereka sering dituntut untuk menegaskan suatu pernyataan ataupun menggabungkan dua pernyataan atau lebih dengan menggunakan perakit. Bagian ini akan membahas tentang pernyataan, beserta perakit-perakit: negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi beserta nilai kebenarannya, dan diakhiri dengan membahas negasi kalimat majemuk.

D. Pernyataan dan Nilai Kebenarannya

Dimulai sejak masih kecil, setiap manusia, sedikit demi sedikit akan melengkapi perbendaharaan kata-katanya. Di saat berkomunikasi, seseorang harus menyusun kata-kata yang dimilikinya menjadi suatu kalimat yang memiliki arti atau bermakna. Kalimat adalah susunan kata-kata yang memiliki arti yang dapat berupa *pernyataan* ("Gaji Pak Amir Rp 1.500.000,00 perbulan."), *pertanyaan* ("Apakah Gaji Pak Amir Rp 1.500.000,00 perbulan?"), *perintah* ("Beri Pak Amir Gaji sebesar Rp 1.500.000,00 perbulannya!") ataupun *permintaan* ("Tolong Beri Pak Amir Gaji sebesar Rp 1.500.000,00 perbulannya."). Karena setiap ilmuwan, matematikawan, ataupun ahli-ahli lainnya akan berusaha untuk menghasilkan suatu pernyataan atau teori yang benar, maka suatu pernyataan (termasuk teori) tidak akan ada artinya jika tidak bernilai benar. Karenanya, dari empat macam kalimat tersebut di atas, hanya pernyataan saja yang menjadi pembicaraan awal ini; karena suatu pernyataan memiliki nilai benar atau salah, tetapi tidak sekaligus benar atau salah. Pernyataan ini sering juga disebut kalimat deklaratif. Untuk lebih menjelaskan tentang kriteria kebenaran ini perhatikan dua kalimat berikut:

1. Semua siswa SMK Nonteknik akan meninggal.
2. 15% dari Rp 200.000.000,00 adalah Rp 30.000.000,00.

Pernyataan: “Semua siswa SMK Nonteknik akan meninggal,” merupakan suatu pernyataan yang bernilai benar karena pada kenyataannya setiap makhluk hidup yang namanya manusia tidak ada satupun yang kekal dan abadi. Pernyataan seperti itu disebut juga dengan pernyataan faktual. Teori-teori Ilmu Pengetahuan Alam dan Sosial banyak didasarkan pada teori korespondensi ini. Karena itu, teori-teori atau pernyataan-pernyataan Ilmu Pengetahuan Alam dan Sosial akan dinilai benar jika pernyataan itu melaporkan, mendeskripsikan, ataupun menyimpulkan kenyataan atau fakta yang sebenarnya. Berbeda dengan IPA dan IPS, Matematika tidak hanya didasarkan pada kenyataan atau fakta semata-mata namun didasarkan pada rasio dan aksioma.

Pernyataan: “Pajak sebesar 15% dari Rp 200.000.000,00 adalah Rp 30.000.000,00” dapat diberi nilai benar karena pernyataan itu konsisten atau koheren ataupun tidak bertentangan dengan aksioma atau semufakatan yang sudah ada yaitu 15% berarti $\frac{15}{100}$ dan konsisten juga dengan cara ataupun aturan yang sudah dipelajari.

Sebagai kesimpulan, suatu kalimat disebut bernilai benar jika hal-hal yang terkandung di dalam pernyataan tersebut sesuai atau cocok dengan keadaan yang sesungguhnya (teori korespondensi), seperti pada IPA maupun IPS; atau konsisten dengan pernyataan-pernyataan sebelumnya (teori konsistensi), seperti pada matematika. Pernyataan pertama di atas sering juga disebut pernyataan faktual. Bagian berikut ini akan menjelaskan tentang perakitan atau perangkai yang sering juga disebut dengan operasi.

E. Negasi Suatu Pernyataan

Jika p adalah suatu pernyataan: "Hasil ulangan Ilmu Hitung Keuangan Budi adalah 9," maka negasi, lawan, atau ingkaran dari pernyataan p tersebut adalah $\sim p$ yaitu: "Hasil ulangan Ilmu Hitung Keuangan Budi adalah bukan 9," atau "Tidak benar bahwa hasil ulangan Ilmu Hitung Keuangan Budi adalah 9." Dari contoh ini jelaslah bahwa jika p merupakan pernyataan yang bernilai benar, maka $\sim p$ akan bernilai salah. Begitu juga sebaliknya, jika p bernilai salah maka $\sim p$ akan bernilai

benar. Secara umum dapat dinyatakan bahwa negasi suatu pernyataan adalah pernyataan lain yang bernilai salah jika pernyataan awalnya benar dan akan bernilai benar jika pernyataan awalnya bernilai salah, seperti ditunjukkan tabel di bawah ini.

p	$\sim p$
B	S
S	B

Konjungsi

Konjungsi adalah suatu pernyataan majemuk yang menggunakan perakit "dan". Contohnya:

"Fitri menyenangi matematika dan tata boga."

Pernyataan tersebut terbentuk oleh dua pernyataan tunggal: "Fitri menyenangi matematika," serta "Fitri menyenangi tata boga." Dalam proses pembelajaran di kelas, berilah kesempatan kepada siswa untuk bertanya kepada diri mereka sendiri, dalam hal mana pernyataan di atas bernilai benar dan dalam hal mana bernilai salah untuk empat kasus berikut, yaitu: Kasus pertama, Fitri memang benar menyenangi matematika dan ia juga menyenangi tata boga; kasus kedua, Fitri menyenangi matematika namun ia tidak menyenangi tata boga; kasus ketiga, Fitri tidak menyenangi matematika namun ia menyenangi tata boga; dan kasus keempat, Fitri tidak menyenangi matematika dan iapun tidak menyenangi tata boga.

Berdasar 4 kasus di atas, dapat disimpulkan bahwa suatu konjungsi $p \wedge q$ akan bernilai benar hanya jika komponen-komponennya, yaitu baik p maupun q, keduanya sama-sama bernilai benar, sedangkan nilai kebenaran yang selain itu akan bernilai salah sebagaimana ditunjukkan pada tabel kebenaran berikut:

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Disjungsi

Disjungsi adalah suatu pernyataan majemuk yang menggunakan perakit "atau". Contohnya:

"Fitri menyenangi matematika atau tata boga."

Seperti ketika dalam proses pembelajaran konjungsi, berilah kesempatan kepada siswa untuk bertanya kepada diri mereka sendiri, dalam hal mana pernyataan di atas bernilai benar dan dalam hal mana bernilai salah untuk empat kasus yang sama. Berdasar 4 kasus di atas, dapat disimpulkan bahwa suatu disjungsi $p \vee q$ akan bernilai salah hanya jika komponen-komponennya, yaitu baik p maupun q , keduanya sama-sama bernilai salah, yang selain itu akan bernilai benar sebagaimana ditunjukkan pada tabel kebenaran berikut:

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Implikasi

Misalkan ada dua pernyataan p dan q . Yang sering menjadi perhatian para ilmuwan maupun matematikawan adalah menunjukkan atau membuktikan bahwa jika p bernilai benar akan mengakibatkan q bernilai benar juga. Untuk mencapai keinginannya tersebut, diletakkanlah kata "Jika" sebelum pernyataan pertama lalu diletakkan juga kata "maka" di antara pernyataan pertama dan pernyataan kedua, sehingga didapatkan suatu pernyataan majemuk yang disebut dengan implikasi, pernyataan bersyarat, kondisional, atau "*hypothetical*" dengan notasi " \Rightarrow " seperti ini: $p \Rightarrow q$. Notasi di atas dapat dibaca dengan: (1) Jika p maka q ; (2) q jika p ; (3) p adalah syarat cukup untuk q ; atau (4) q adalah syarat perlu untuk p .

Pada proses pembelajaran di kelas, sebagai salah satu alternatif dapat digunakan pernyataan majemuk berikut ini sebagai contoh:

Jika saya (Adi) makan maka saya kenyang.

Dalam hal ini dimisalkan:

p : Saya makan.

q: Saya kenyang.

Berilah kesempatan bagi siswa untuk berpikir, dalam hal manakah pernyataan majemuk Adi tadi akan bernilai benar atau salah untuk empat kasus seperti biasa. Dari contoh di atas beserta empat kasus yang ada dapatlah disimpulkan bahwa implikasi $p \Rightarrow q$ hanya akan bernilai salah untuk kasus kedua di mana p bernilai benar namun q-nya bernilai salah, sedangkan yang selain itu implikasi $p \Rightarrow q$ akan bernilai benar seperti ditunjukkan tabel kebenaran berikut ini:

	p	q	$p \Rightarrow q$
Biimplikasi	B	B	B
	B	S	S
	S	B	B
	S	S	B

Biimplikasi atau bikondisional adalah pernyataan majemuk dari dua pernyataan p dan q yang dinotasikan dengan $p \Leftrightarrow q$ yang bernilai sama dengan $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ sehingga dapat dibaca: "p jika dan hanya jika q" atau "p bila dan hanya bila q."

Tabel kebenaran dari $p \Leftrightarrow q$ adalah:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
B	B	B	B	B
B	S	S	B	S
S	B	B	S	S
S	S	B	B	B

Dengan demikian jelaslah bahwa biimplikasi dua pernyataan p dan q hanya akan bernilai benar jika kedua pernyataan tunggalnya bernilai sama, yaitu keduanya bernilai salah atau keduanya bernilai benar.

Beberapa contoh biimplikasi dalam matematika adalah:

1. Suatu barisan disebut barisan aritmetika jika dan hanya jika $U_n - U_{n-1} = k$ (konstanta), $n \in A$ dan $n > 1$.

2. Dua kejadian A dan B disebut dua kejadian yang saling lepas bila dan hanya bila $A \cap B = \{\}$.

Ingkaran Atau Negasi Pernyataan Majemuk

Pada bagian depan sudah dibahas tentang negasi pernyataan tunggal. Berikut ini adalah pembahasan tentang negasi pernyataan majemuk.

1. Negasi Suatu Konjungsi

Karena suatu konjungsi $p \wedge q$ akan bernilai benar hanya jika kedua komponennya bernilai benar. Maka negasi suatu konjungsi $p \wedge q$ adalah $\sim p \vee \sim q$; sebagaimana ditunjukkan tabel kebenaran berikut:

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
B	B	B	S	S	S
B	S	S	S	B	B
S	B	S	B	S	B
S	S	S	B	B	B

2. Negasi Suatu Disjungsi

Negasi suatu disjungsi $p \vee q$ adalah $\sim p \wedge \sim q$ sebagaimana ditunjukkan tabel kebenaran berikut:

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
B	B	B	S	S	S
B	S	B	S	B	S
S	B	B	B	S	S
S	S	S	B	B	B

3. Negasi Suatu Implikasi

Negasi suatu implikasi $p \Rightarrow q$ adalah $p \wedge \sim q$ seperti ditunjukkan tabel kebenaran berikut ini:

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \sim q$
B	B	S	B	S
B	S	B	S	B
S	B	S	B	S
S	S	B	B	S

Dengan demikian, $p \Rightarrow q \equiv \sim[\sim(p \Rightarrow q)] \equiv \sim(p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee q$

4. Negasi Suatu Biimplikasi

Karena biimplikasi atau bikondisional $p \Leftrightarrow q$ ekuivalen dengan $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$; sehingga:

$$\begin{aligned} \sim(p \Leftrightarrow q) &\equiv \sim[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \\ &\equiv \sim[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)] \\ &\equiv \sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p) \\ &\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p) \end{aligned}$$

Tabel kebenaran dari suatu negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi di atas merupakan dasar dalam mencari nilai kebenaran pernyataan-pernyataan majemuk seperti di saat menentukan nilai kebenaran pernyataan majemuk $(\sim p \wedge r) \vee (\sim r \Rightarrow q)$ seperti berikut ini.

p	q	r	$\sim p$	$\sim r$	$(\sim p \wedge r)$	$(\sim r \Rightarrow q)$	$(\sim p \wedge r) \vee (\sim r \Rightarrow q)$
B	B	B	S	S	S	B	B
B	B	S	S	B	S	B	B
B	S	B	S	S	S	B	B
B	S	S	S	B	S	S	S
S	B	B	B	S	B	B	B
S	B	S	B	B	S	B	B
S	S	B	B	S	B	B	B
S	S	S	B	B	S	S	S

Latihan 2.1

- Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan berikut!
 - Presiden RI ketiga adalah Soeharto.
 - $3 \times 2 = 6 \wedge 4 + 2 = 6$
 - $3 \times 0 = 6 \Leftrightarrow 4 + 0 = 6$.
 - $3 + 2 = 5 \Rightarrow 4 + 2 = 5$.
 - $3 + 2 = 5$ atau Jakarta ibukota Jawa Timur
 - Jika $x^2 = 4$ maka $x = 2$.
 - Jika $x = -2$ maka $x^2 = 4$.
 - Jika $3x + 4 = 2$ dan $x \in B$, maka $x = -1$.
- Jika pernyataan p: 10 habis dibagi 5; dan

q: 8 adalah bilangan prima;

nyatakan dalam kalimat sehari-hari pernyataan-pernyataan di bawah ini lalu tentukan nilai kebenarannya.

i. $\sim p$

vi. $\sim p \wedge q$

ii. $\sim q$

vii. $p \wedge \sim q$

iii. $p \wedge q$

viii. $p \Rightarrow q$

iv. $p \vee q$

ix. $p \Leftrightarrow q$

v. $\sim p \wedge \sim q$

x. $p \vee \sim q \Rightarrow (\sim p \vee q)$

3. Jika: a: Lisa siswi SMK Nonteknik; dan

b: Lisa gadis cerdas,

nyatakan pernyataan di bawah ini dengan menggunakan a, b dan simbol-simbol logika matematika.

a. Lisa siswi SMK Nonteknik namun tidak cerdas.

b. Lisa bukan siswi SMK Nonteknik dan tidak cerdas.

c. Meskipun Lisa bukan siswi SMK Nonteknik namun ia gadis yang cerdas.

d. Lisa siswi SMK Nonteknik yang cerdas.

e. Tidak benar bahwa Lisa siswi SMK Nonteknik yang cerdas.

f. Jika Lisa siswi SMK Nonteknik maka ia tidak cerdas.

g. Jika Lisa bukan siswi SMK Nonteknik maka ia tidak cerdas.

4. Tentukan negasi pernyataan pada soal nomor 1 lalu tentukan nilai kebenarannya.

5. Buatlah tabel kebenaran dari pernyataan majemuk ini:

a. $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$

b. $p \wedge q \Rightarrow (q \wedge \sim q \Rightarrow r \wedge q)$

c. $\sim[(\sim p \Rightarrow r) \vee (p \Rightarrow \sim q)] \wedge r$

6. Tentukan negasi dari pernyataan majemuk nomor 5 di atas.

Bab III

Konvers, Invers, dan Kontraposisi Suatu Implikasi

Pengertian dan Contohnya

Perhatikan pernyataan berikut ini:

Jika suatu bilangan asli berangka satuan 0 maka bilangan tersebut
habis dibagi 5.

Bentuk umum suatu implikasi adalah:

$$p \Rightarrow q$$

Pada contoh di atas:

p : Bilangan asli berangka satuan 0

q : Bilangan asli yang habis dibagi 5.

Dari implikasi $p \Rightarrow q$ di atas, dapat dibentuk tiga implikasi lainnya, yaitu:

Konversnya, dengan notasi $q \Rightarrow p$

Inversnya, dengan notasi $\sim p \Rightarrow \sim q$

Kontraposisinya, dengan notasi $\sim q \Rightarrow \sim p$

Dengan demikian; konvers, invers, dan kontraposisi dari implikasi: “Jika suatu bilangan asli berangka satuan 0 maka bilangan tersebut habis dibagi 5,” berturut-turut adalah:

1. Konvers: Jika suatu bilangan asli habis dibagi 5 maka bilangan asli tersebut berangka satuan 0 ($q \Rightarrow p$).
2. Invers: Jika suatu bilangan asli tidak berangka satuan 0 maka bilangan tersebut tidak habis dibagi 5 ($\sim p \Rightarrow \sim q$).
3. Kontraposisi: Jika suatu bilangan asli tidak habis dibagi 5 maka bilangan asli tersebut tidak berangka satuan 0 ($\sim q \Rightarrow \sim p$).

Berdasar penjelasan di atas, jawablah pertanyaan berikut:

1. Tentukan nilai kebenaran dari implikasi, konvers, invers, dan kontraposisinya.
2. Hal menarik apa saja yang Anda dapatkan dari kegiatan di atas?

Berhentilah membaca naskah ini, cobalah untuk menjawab pertanyaan di atas dahulu. Jawaban pertanyaan di atas adalah sebagai berikut:

1. Nilai kebenaran dari implikasi, konvers, invers, dan kontraposisinya.
 - a. Untuk menentukan nilai kebenaran dari implikasi: “Jika suatu bilangan asli berangka satuan 0 maka bilangan tersebut habis dibagi 5,” yang perlu diperhatikan adalah implikasi di atas bernilai sama dengan pernyataan berkuantor: “Semua/setiap bilangan asli yang berangka satuan 0 mesti habis dibagi 5.” Implikasi ini bernilai benar, karena semua/setiap bilangan asli yang berangka satuan 0 akan selalu habis dibagi 5.
 - b. Nilai kebenaran konversnya, dalam bentuk $q \Rightarrow p$, yaitu: “Jika suatu bilangan asli habis dibagi 5 maka bilangan asli tersebut berangka satuan 0,” yang ekuivalen dengan pernyataan: “Setiap bilangan asli yang habis dibagi 5 akan selalu berangka satuan 0.”

Pernyataan terakhir ini bernilai salah karena dapat ditunjukkan adanya bilangan asli yang habis dibagi 5 namun bilangan asli tersebut tidak berangka satuan 0, seperti 5, 15, 25, 35, maupun 1005.
 - c. Nilai kebenaran inversnya, dalam bentuk $\sim p \Rightarrow \sim q$, yaitu: “Jika suatu bilangan asli tidak berangka satuan 0 maka bilangan tersebut tidak habis dibagi 5.” Sekali lagi, pernyataan di atas adalah ekuivalen dengan pernyataan: “Setiap bilangan asli yang tidak berangka satuan 0 tidak akan habis dibagi 5.” Pernyataan ini jelas bernilai salah karena dapat ditunjukkan adanya bilangan asli yang tidak berangka satuan 0 yang habis dibagi 5, yaitu 5, 15, 25, 35, maupun 1005.
 - d. Nilai kebenaran kontraposisinya, dalam bentuk $\sim q \Rightarrow \sim p$, yaitu: “Jika suatu bilangan asli tidak habis dibagi 5 maka bilangan asli tersebut tidak berangka satuan 0.” Pernyataan di atas adalah ekuivalen dengan pernyataan: “Setiap bilangan asli yang tidak habis dibagi 5 akan selalu tidak berangka satuan 0.” Pernyataan seperti ini jelas bernilai benar. Contohnya 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, ... yang tidak habis dibagi 5 yang selalu tidak berangka satuan 0.
2. Dari soal di atas nampaklah bahwa nilai kebenaran dari implikasi serta kontraposisinya adalah sama, sedangkan nilai kebenaran konvers adalah sama dengan inversnya.

Ingkaran Implikasi, Konvers, Invers, dan Kontraposisinya.

Tentukan ingkaran atau negasi dari implikasi, konvers, invers, dan kontraposisi: “Jika suatu bilangan asli berangka satuan 0 maka bilangan tersebut habis dibagi 5.” Untuk menjawab pertanyaan tadi ataupun untuk menentukan negasi atau ingkaran konvers, invers, dan kontraposisi maka pengetahuan tentang negasi yang sudah dibahas di bagian depan sangat penting dan menentukan, terutama pengetahuan untuk menentukan negasi atau ingkaran soal nomor 1 s.d. 3 di bawah ini.

- | | |
|----------------------|--------------------------------|
| 1. $p \wedge q$ | 4. $q \Rightarrow p$ |
| 2. $p \vee q$ | 5. $\sim p \Rightarrow \sim q$ |
| 3. $p \Rightarrow q$ | 6. $\sim q \Rightarrow \sim p$ |

Sebagai pengecek, bandingkan hasil yang Anda dapatkan dengan jawaban di bawah ini.

- | | |
|---------------------------|----------------------|
| 1. $\sim p \vee \sim q$ | 4. $q \wedge \sim p$ |
| 2. $\sim p \wedge \sim q$ | 5. $\sim p \wedge q$ |
| 3. $p \wedge \sim q$ | 6. $\sim q \wedge p$ |

Dengan demikian, dari implikasi $p \Rightarrow q$: “Jika suatu bilangan asli berangka satuan 0 maka bilangan tersebut habis dibagi 5”; akan didapat ingkaran atau negasi dari implikasi, konvers, invers, dan kontraposisi di atas adalah:

1. Negasi dari implikasi $p \Rightarrow q$ adalah $p \wedge \sim q$, yaitu: Terdapat bilangan asli berangka satuan 0 namun bilangan asli tersebut tidak habis dibagi 5.
2. Negasi konvers $q \Rightarrow p$ adalah $q \wedge \sim p$, yaitu: Terdapat bilangan asli yang habis dibagi 5 yang angkanya bukan 0.
3. Negasi invers $\sim p \Rightarrow \sim q$ adalah $\sim p \wedge q$, yaitu: Terdapat bilangan asli tidak berangka satuan 0 yang habis dibagi 5.
4. Negasi kontraposisi $\sim q \Rightarrow \sim p$ adalah $\sim q \wedge p$, yaitu: Terdapat bilangan asli tidak habis dibagi 5 yang berangka satuan 0.

F.

G. Latihan 3.1

1. Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari implikasi berikut:
 - a. Jika suatu bendera adalah bendera Jepang, maka ada bintang pada bendera tersebut.
 - b. Jika suatu bendera adalah bendera RI maka bendera tersebut berwarna merah dan putih.
 - c. Jika dua persegi panjang kongruen maka luasnya sama
 - d. Jika segitiga ABC adalah segitiga samasisi maka sisi-sisi segitiga tersebut sama panjang.
 - e. $a > 0 \Rightarrow a^3 > 0$
 - f. $a = 0 \Rightarrow ab = 0$
 - g. $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$
2. Tentukan nilai kebenaran implikasi, konvers, invers, dan kontraposisi dari soal di atas.
3. Hal menarik apa saja yang Anda dapatkan dari hasil kegiatan 2 itu?
4. Buatlah ingkaran dari implikasi, beserta konvers, invers, dan kontraposisi dari pernyataan berikut ini.
 - a. Jika suatu bendera adalah bendera Jepang, maka ada bintang pada bendera tersebut.
 - b. Jika dua persegi panjang kongruen maka luasnya sama.
 - c. Jika segitiga ABC adalah segitiga samasisi maka sisi-sisi segitiga tersebut sama panjang.
 - d. $a > 0 \Rightarrow a^3 > 0$
 - e. $a = 0 \Rightarrow ab = 0$
 - f. $x = -5 \Rightarrow x^2 = 25$
5. Hal menarik apa saja yang Anda dapatkan dari hasil kegiatan 4 itu?

I. Penarikan Kesimpulan

A. Penarikan Kesimpulan atau Argumen

Jika pernyataan atau proposisi dilambangkan dengan kalimat yang memiliki nilai benar saja atau salah saja, maka istilah sah atau tidak sah berkaitan dengan penarikan kesimpulan, penalaran, ataupun argumen. Beda kedua istilah menurut Soekardijo (1988) adalah, kalau penalaran itu aktivitas pikiran yang abstrak maka argumen ialah lambangnya yang berbentuk bahasa atau bentuk-bentuk lambang lainnya. Dikenal dua macam penarikan kesimpulan. Yang pertama adalah induksi atau penalaran induktif dan yang kedua adalah deduksi atau penalaran deduktif. Yang akan dibicarakan pada modul ini adalah penalaran deduktif atau deduksi. Contoh deduksi atau penalaran deduktif adalah:

Premis 1: Semua siswa SMK Nonteknik akan meninggal.

Premis 2: Amri siswa SMK Nonteknik

Kesimpulan: Jadi, Amri pada suatu saat akan meninggal.

B. Sahih Tidaknya Penarikan Kesimpulan

Perhatikan contoh penarikan kesimpulan ini:

(1) SMK Arimbi terletak di sebelah barat SMK Puteri.

(2) SMA Putera terletak di sebelah barat SMK Arimbi.

Jadi, SMA Putera terletak di sebelah barat SMK Puteri.

Pada proses pembelajaran di kelas, ketiga SMK tersebut sebaiknya dimodifikasi sehingga sesuai dengan lingkungan siswa. Dengan cara seperti itu, diharapkan proses pembelajarannya akan lebih bermakna bagi para siswa. Berilah kesempatan kepada para siswa untuk berpikir dengan mengajukan pertanyaan ini: “Jika kedua premis argumen tadi bernilai benar, apakah mungkin kesimpulannya bernilai salah?”

Jawabannya adalah tidak mungkin. Untuk meyakinkan mereka, dapat saja digunakan diagram berikut:



Contoh di atas menunjukkan penarikan kesimpulan yang valid atau sah sebagaimana dinyatakan Giere (84:39) berikut: “*Any argument in which the truth of the premises makes it impossible that the conclusion could be false is called a deductively valid argument.*” Yang artinya, setiap argumen di mana kebenaran dari premis-premisnya tidak memungkinkan bagi kesimpulannya untuk salah disebut dengan argumen yang sah atau valid.

Giere (1984) mencontohkan bahwa dari suatu premis-premis yang bernilai salah akan dapat dihasilkan suatu kesimpulan yang bernilai benar melalui suatu proses penarikan kesimpulan yang valid seperti:

- Kerbau adalah binatang bersayap. (Salah)
- Semua binatang bersayap tidak dapat terbang. (Salah)
- Jadi, kuda tidak dapat terbang (Benar)

Giere (1984) mencontohkan juga bahwa dari suatu premis-premis yang bernilai salah akan dapat dihasilkan suatu kesimpulan yang bernilai salah melalui suatu contoh proses penarikan kesimpulan yang valid berikut ini.

- Bulan lebih besar daripada bumi. (Salah)
- Bumi lebih besar daripada matahari. (Salah)
- Jadi, bulan lebih besar daripada matahari (Salah)

C. Beberapa Penarikan Kesimpulan yang Sah

Beberapa penarikan kesimpulan yang sah atau valid yang akan dibahas pada bagian ini di antaranya adalah *modus ponens*, *modus tolens*, dan *silogisme*.

1. Modus Ponens

Perhatikan contoh berikut.

- Premis 1: Semua siswa SMK akan meninggal
- Premis 2: Amri siswa SMK.
- Kesimpulan: Jadi, Amri pada suatu saat akan meninggal.

Premis 1 adalah senilai dengan: “Jika x siswa SMK maka x akan meninggal.”
 Pada contoh ini, premis-premis yang bernilai benar tidak akan memungkinkan bagi kesimpulannya untuk bernilai salah, sehingga penarikan kesimpulan bentuk seperti itu disebut dengan penarikan kesimpulan sah, sah, valid, atau *correct*.
 Bentuk umumnya adalah:

$$\frac{p \Rightarrow q \quad p}{\therefore q}$$

Untuk mengetahui validitas suatu argumen deduktif adalah dengan membentuk kondisional atau implikasi di mana konjungsi premis-premis dari argumen tersebut dijadikan sebagai antesedennya dan konklusi dari argumen tersebut dijadikan sebagai konsekuennya. Sebagai contoh, untuk mengetahui valid tidaknya argumen berikut:

$$\frac{p \Rightarrow q \quad (\text{Premis 1}) \quad p \quad (\text{Premis 2})}{\text{Jadi } q \quad (\text{Kesimpulan})}$$

adalah dengan membentuk konjungsi dari premis 1 dan 2, yaitu:

$(p \Rightarrow q) \wedge p$ lalu konjungsi tersebut diimplikasikan dengan konklusi argumen yang ada sehingga menjadi: $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$.

Bentuk terakhir ini harus dibuktikan melalui tabel kebenaran apakah termasuk tautologi atau tidak. Jika bentuk terakhir tadi merupakan tautologi maka argumen tadi valid. Jika tidak dihasilkan suatu tautologi maka argumen tadi tidak valid. Untuk membuktikannya, dapat ditunjukkan bahwa $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ merupakan suatu tautologi lewat tabel kebenaran di bawah ini.

p	q	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S
Langkah ke		
		1 2 1 3 1 4 1

Pada langkah terakhir (langkah ke-4) terlihat nilai kebenarannya adalah semuanya benar (tautologi), sehingga modus ponens termasuk penarikan kesimpulan yang sah, valid, absah, atau sah.

Contoh modus ponens:

- a. Jika seseorang adalah siswa SMK maka ia harus belajar.
Anita siswa SMK.
Jadi, Anita harus belajar.
- b. Pada hari Senin di sekolah ada pelajaran Hitung Keuangan.
Tanggal 2 April 2001 adalah hari Senin.
Jadi, pada tanggal 2 April 2001 ada pelajaran Hitung Keuangan.
- c. Jika suatu bilangan asli berangka satuan 6 maka bilangan itu habis dibagi 2.
126 adalah bilangan asli berangka satuan 6.
Jadi, 126 habis dibagi 2.

2. Modus Tolens

Perhatikan contoh berikut.

Premis 1: Jika seseorang adalah siswa SMK maka ia pintar

Premis 2: Orang itu tidak pintar.

Kesimpulan: Jadi, orang itu bukan siswa SMK.

Pada contoh ini, premis-premis yang bernilai benar tidak memungkinkan bagi kesimpulannya untuk bernilai salah juga, sehingga penarikan kesimpulan bentuk seperti itu disebut dengan penarikan kesimpulan sah, sah, valid, atau *correct*.

Bentuk umum modus tolens adalah:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

Argumen di atas dapat dibuktikan sendiri seperti pada saat membuktikan modus ponens, yaitu dengan membuktikan implikasi $[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim q)] \Rightarrow \sim p$ sebagai suatu tautologi.

Contoh modus tolens:

- a. Jika ia vegetarian maka ia tidak makan daging.
Pythagoras makan ayam goreng.
Jadi, Pythagoras bukan seorang vegetarian
- b. Jika Ani belajar tekun maka ia akan lulus ujian.
Ani tidak lulus ujian
Jadi, Ani tidak belajar dengan tekun.
- c. Grafik $y = ax^2 + bx + c$ terletak seluruhnya di atas sumbu-X bila $a > 0$ dan $D = b^2 - 4ac < 0$
 $y = -2x^2 + 4x - 5$ dengan $a = -2 < 0$
Jadi, tidak seluruh grafik $y = -2x^2 + 4x - 5$ terletak di atas sumbu-X.

3. Silogisme

Perhatikan contoh ini.

(1) Rumah Pythagoras di sebelah barat rumah Al Jabbar.

(2) Rumah Al Jabbar di sebelah barat rumah Sumanto

Jadi, rumah Pythagoras di sebelah barat rumah Sumanto

Tentunya para siswa dan Anda sendiri tidak akan mengetahui apakah ketiga orang tersebut benar-benar memiliki rumah seperti yang dinyatakan kalimat tersebut. Tetapi Anda dapat menyatakan bahwa jika premis-premisnya bernilai benar maka kesimpulannya tidaklah mungkin bernilai salah, sehingga penarikan kesimpulan seperti itu merupakan contoh penarikan kesimpulan yang sah atau valid. Bentuk umum penarikan kesimpulan yang dikenal dengan nama silogisme itu adalah:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline \therefore p \Rightarrow r \end{array}$$

Kesahihan argumen silogisme ini dapat dibuktikan sendiri seperti di atas, yaitu dengan menunjukkannya pada tabel kebenaran bahwa bentuk $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ merupakan suatu tautologi.

Contoh Silogisme:

- a. Jika Arimbi selesai makan maka ia mengantuk.
Jika ia mengantuk maka ia akan tertidur selama lima menit.
Jadi, jika Arimbi selesai makan maka ia akan tertidur selama lima menit.
- b. Setiap hari Sabtu ibu tidak bekerja di kantor (libur).
Ibu menjahit di kamar belakang jika tidak bekerja.
Jadi, setiap hari Sabtu ibu akan menjahit di kamar belakang
- c. Jika x dan y adalah dua bilangan bulat berurutan maka yang satu genap dan yang satunya lagi ganjil.
Jika salah satu bilangan genap dan yang satunya lagi ganjil maka jumlah kedua bilangan itu ganjil.
Jadi, jika x dan y merupakan dua bilangan bulat berurutan maka jumlah kedua bilangan itu ganjil.

Perlu diingatkan sekali lagi bahwa dalam penarikan kesimpulan, premis-premisnya diasumsikan atau dianggap benar dan argumennya harus valid, dan berikut ini adalah beberapa contoh soal tentang penarikan kesimpulan.

Contoh 1

Perhatikan premis-premis ini.

- (1) Jika Anita mendapat A pada ujian akhir maka Anita mendapat A untuk mata kuliah itu.
- (2) Jika Anita mendapat A untuk mata kuliah itu maka ia dinominasikan menerima beasiswa.
- (3) Anita tidak dinominasikan menerima beasiswa.

Buatlah suatu kesimpulan dari tiga premis tersebut.

Penyelesaian

Misal p: Anita mendapat nilai A pada ujian akhir
 q: Anita mendapat nilai A untuk mata kuliah itu
 r: Anita dinominasikan mendapat beasiswa

Pernyataan-pernyataan di atas dapat diterjemahkan secara simbolik:

- (1) $p \Rightarrow q$
- (2) $q \Rightarrow r$
- (3) $\sim r$

Dari premis (1) dan (2), dengan silogisme, akan diperoleh $p \Rightarrow r$. Jika dilanjutkan dengan premis (3), yaitu $\sim r$, akan terjadi modus tolens seperti terlihat di bawah ini.

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow r \\ \sim r \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

Kesimpulannya, Anita tidak mendapat nilai A pada ujian akhir.

Contoh 2:

Apakah penarikan kesimpulan berikut ini valid?

Jika $x = 3$ maka $x^2 = 9$
 $x^2 = 9$
 Jadi, $x = 3$

Penyelesaian:

Bentuk simbolik penarikan kesimpulan di atas adalah:

$p \Rightarrow q$
 q
 Jadi, p

Bentuk di atas bukan modus ponens, modus tolens, maupun silogisme. Untuk menentukan valid atau tidaknya, dibuat tabel kebenaran $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$ berikut.

p	q	[(p	\Rightarrow	q)	\wedge	q]	\Rightarrow	p
B	B	B	B	B	B	B	B	B
B	S	B	S	S	S	S	B	B
S	B	S	B	B	B	B	S	S
S	S	S	B	S	S	S	B	S
Langkah		1	2	1	3	1	4	1

Nilai kebenaran $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ yang diperlihatkan dalam langkah 4 ternyata bukan tautologi. Dengan demikian bentuk penarikan kesimpulan di atas tidak valid.

Argumen yang tidak valid lainnya berbentuk:

$$\frac{p \Rightarrow q}{\sim p} \\ \hline \sim q$$

Latihan 4.1

Untuk soal nomor 1 sampai 10, buatlah suatu kesimpulan dari pernyataan-pernyataan berikut.

1. (1) Jika Pak A tidak masuk maka semua murid senang
(2) Beberapa murid tidak senang.
2. (1) Suatu fungsi disebut fungsi bijektif jika fungsi itu fungsi injektif (satu-satu) dan fungsi onto.
(2) Fungsi f bukan fungsi bijektif.
3. (1) Jika petani merabuk dua kali sebulan maka ia akan panen raya.
(2) Jika rabuk harganya mahal maka petani akan menangis.
(3) Jika orang tidak merabuk dua kali sebulan maka petani tidak menangis.
4. (1) Lingkaran dapat digambar melalui 3 titik jika ke-3 titik tidak segaris.
(2) Suatu lingkaran tidak dapat digambar.
5. (1) Nilai sinus α akan positif jika α di kuadran I atau II.
(2) α di kuadran II.
6. (1) Jika $A \subset B$ maka $A \cap B = A$ dan (2) $A \cap B \neq A$.
7. (1) Jika sekarang A maka besok B; (2) Jika sekarang C maka besok D
(3) Sekarang A atau C

Untuk soal nomor 6 sampai 10, tentukan apakah penarikan kesimpulan di bawah ini valid? Berikan penjelasannya.

8. Jika n bilangan prima ganjil maka $n > 2$. Jika $n > 2$ maka $n^2 > 4$. Jadi, jika n bilangan prima ganjil maka $n^2 > 4$.
9. Jika besar sudut α negatif maka cosinus α positif. Sudut $A = 60^\circ$. Jadi, cosinus A negatif
10. Jika n bilangan ganjil maka n^2 bilangan ganjil. Jika n^2 bilangan ganjil maka $n^2 + 1$ bilangan genap. $n^2 + 1$ bilangan ganjil. Jadi, n bilangan genap.

11. Jika hujan lebat turun maka akan terjadi banjir. Sekarang tidak banjir. Jadi, hujan tidak lebat.
12. Wanita cantik adalah siswi SMK Nonteknik. Wanita yang pintar tidak cantik. Jadi, siswi SMK Nonteknik tidak pintar.
13. Jika ia tidak sakit maka ia masuk sekolah. Jika ia tidak lelah maka ia masuk sekolah. Ia sakit dan tidak lelah. Jadi, ia masuk sekolah.
14. $p \vee q \vee r$; $p \Rightarrow s$; $q \Rightarrow s$; $r \Rightarrow s$. Jadi r .
15. $p \Rightarrow q$; $r \Rightarrow s$; $\sim p \vee \sim r$. Jadi $\sim q \vee \sim s$.
16. $p \Rightarrow q$; $\sim p$. Jadi $\sim q$.
17. $p \Rightarrow q$; q . Jadi p
18. $p \vee r$; $\sim p$. Jadi $\sim r$.
19. $p \Rightarrow q$; $\sim q$. Jadi $\sim p$
20. $p \Rightarrow q$; $r \Rightarrow \sim q$; $s \Rightarrow r$. Jadi $\sim s \Rightarrow \sim p$.

Bab V

Penutup

Paket ini dimulai dengan pembahasan mengenai pengertian logika dan pernyataan akan pentingnya logika, karena pengetahuan tentang logika ini sangat sering digunakan di dalam kehidupan nyata sehari-hari, di dalam mata pelajaran matematika sendiri maupun mata pelajaran lainnya. Isi paket ini tidak hanya menekankan pada penghafalan rumus atau teorema semata-mata, namun sudah berusaha untuk memberi kemudahan bagi para guru dalam proses pembelajarannya di kelas. Sebagai contoh, tabel kebenaran untuk $p \Rightarrow q$ tidak langsung diberikan dengan begitu saja, namun dengan contoh yang menurut hemat penulis dapat memberi kemudahan bagi siswa untuk lebih memahaminya. Begitu juga tentang valid dan tidak validnya suatu argumen atau suatu penarikan kesimpulan.

Pada akhirnya, mudah-mudahan paket ini dapat memberi masukan kepada Bapak dan Ibu Guru SMK Nonteknik sehingga pada akhirnya akan bermunculan pemecah masalah yang tangguh dan penemu yang hebat dari bumi kita ini. Namun jika para pemakai paket ini mengalami kesulitan ataupun memiliki saran untuk penyempurnaannya, sudilah kiranya menghubungi penulis sendiri atau ke PPPG Matematika, Kotak Pos 31 YKBS, Yogyakarta. Sebelumnya disampaikan terima kasih.

Daftar Pustaka

- Copi, I.M. (1978) *Introduction to Logic*. New York: Macmillan.
- Giere, R. N. (1984). *Understanding Scientific Reasoning (2nd Edition)*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Kusumah, Y.S. (1986). *Logika Matematika Elementer*. Bandung: Tarsito.
- Krismanto, Al. (1991). *Prima EBTA Matematika SMA*. Klaten: PT Intan Pariwara.
- Lipschutz, S; Silaban, P. (1985). *Teori Himpunan*. Jakarta: Erlangga.
- Prayitno, E. (1995). *Logika Matematika*. Yogyakarta: PPPG Matematika.
- Soekardijo, R.G. (1988). *Logika Dasar, Tradisionil, Simbolik dan Induktif*. Jakarta: Gramedia.
- Suriasumantri, J.S. (1988). *Filsafat Ilmu*. Jakarta: Sinar Harapan.**
- Tirta Seputro, Theresia (1992). *Pengantar Dasar Matematika Logika dan Teori Himpunan*. Jakarta: Erlangga.
- Tim Matematika (1980). *Matematika 12 untuk SMA*. Jakarta : Depdikbud.
- Vance, E. P. (19..). *Modern College Algebra*. London : Addison Wesley.