BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Apabila kita cermati, hampir semua fenomena yang terjadi di jagad raya ini mengikuti hukum sebab akibat. Adanya pergantian siang dan malam adalah sebagai akibat dari perputaran matahari pada porosnya. Jarak (S) yang ditempuh oleh suatu mobil misalnya, dipengaruhi oleh waktu tempuhnya (t). Demikian juga *demand (d)* konsumen dipengaruhi oleh *quantity (q)* barang dan *price(p)* nilai harga yang ada di pasaran. Dalam bahasa matematika dapat dinyatakan bahwa jarak adalah fungsi dari waktu, demand merupakan fungsi dari jumlah dan harga barang. Ini berati begitu pentingnya pemahaman fungsi dalam menjelaskan fenomena jagad raya ini.

Namun demikian apabila kita lihat pembelajaran di sekolah , tidak sedikit Bapak atau Ibu guru di lapangan yang menemui kesulitan dalam pembelajaran konsep-konsep tentang relasi dan fungsi. Dari hasil Monitoring dan Evaluasi di lapangan yang dilakukan oleh PPPG Matematika Yogyakarta terhadap para alumnus dan guru imbasnya menunjukkan bahwa topik tentang fungsi ini merupakan salah satu dari beberapa pokok bahasan yang dianggap relatif sulit oleh guru maupun siswa. Sehubungan dengan hal tersebut, kami mencoba menyusun atau merangkum dari berbagai sumber untuk bisa disajikan sebagai bahan ajar mata diklat Relasi dan Fungsi.

B. Tujuan

Bahan ajar ini disusun dengan tujuan meningkatkan wawasan dan kemampuan peserta diklat untuk mengembangkan keterampilan siswa SMK dalam memecahkan masalah relasi dan fungsi.

C. Ruang Lingkup

Ruang lingkup materi yang dibahas dalam bahan ajar ini meliputi :

1. Pengertian relasi , fungsi , sifat dan jenis-jenis fungsi.
2. Fungsi linier, fungsi kuadarat, dan penerapannya.

BAB II

PENGERTIAN RELASI, FUNGSI, SIFAT DAN JENIS FUNGSI

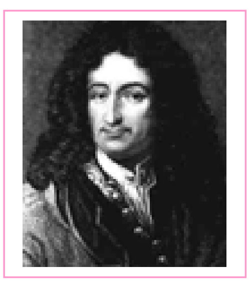
Setelah mengikuti pembelajaran Bab II ini peserta diklat diharapkan dapat menjelaskan pengertian relasi, fungsi, sifat, dan jenis fungsi dengan benar.

Galileo Galilei (1564-1642) merupakan salah satu astronom terkenal dari Italia yang dikenal luas dengan penemuannya tentang hubungan yang sangat teratur antara tinggi suatu benda yang dijatuhkan dengan waktu tempuhnya menuju tanah, sebagaimana ditunjukkan dengan tabel berikut:

Waktu t (dalam detik)	0	1	2	3	4	5	…
Jarak d (dalam kaki)	0	16	64	144	256	400	…

Tabel 1.1

Tabel di atas menunjukkan bahwa jarak yang ditempuh d (dalam kaki/feet) merupakan fungsi dari waktu (dalam menit) dengan rumus $d = (4t)^2$. Dengan rumus fungsi itu, nilai dari suatu peubah akan dapat ditentukan jika nilai dari peubah yang satunya diketahui.



Konsep "fungsi" terdapat hampir dalam setiap cabang matematika sehingga merupakan suatu yang sangat penting artinya dan banyak sekali kegunaannya. Akan tetapi pengertian dalam matematika agak berbeda dengan pengertian dalam kehidupan sehari-hari.

Gb. 2.1

Dalam pengertian sehari-hari, "fungsi" adalah guna atau manfaat. Kata fungsi dalam matematika sebagaimana diperkenalkan oleh Leibniz (1646-1716) yang gambarnya terlihat di atas digunakan untuk menyatakan suatu hubungan atau kaitan yang khas antara dua himpunan.

Mengingat konsep fungsi menyangkut hubungan atau kaitan dari dua himpunan, maka disini kita awali dulu pembicaraan kita mengenai fungsi dengan hubungan atau relasi antara dua himpunan.

A.**Pengertian Relasi**

Suatu relasi (biner) F dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu perkawanan elemen-elemen di A dengan elemen-elemen di B.

Contoh:

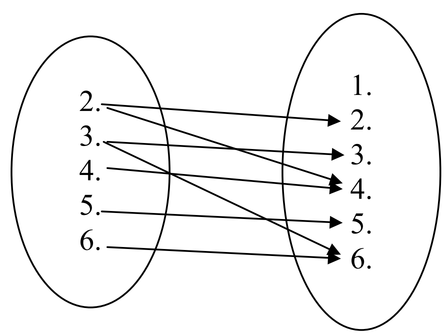
A = {2,3,4,5,6}

B = {1,2,3,4,5,6}

Relasi : "adalah faktor dari "

Dapat disajikan dalam dua macam cara.

a. Dengan diagram panah



Gb. 2.2

b. Dengan diagram pasangan berurutan.

R = {(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (5,5), (6,6)}

Dengan menggunakan penyajian relasi di atas, maka relasi R dari himpunan A ke himpunan B dapat kita definisikan sebagai himpunan pasangan (a,b) pada A $\times$ B, di mana a $\in$ A dan b $\in$ B salah satu dari kalimat berikut:

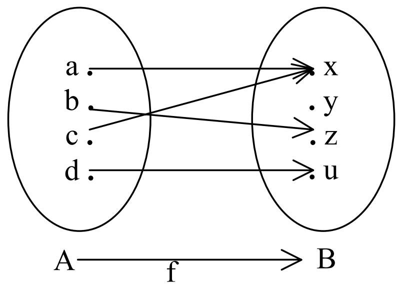
(1) "a berelasi dengan b" ditulis a R b atau R(a,b)

(2) "a tidak berelasi dengan b" ditulis a $\not{R}$ b atau $\not{R}$(a,b)

Relasi atau hubungan itu dapat terjadi di berbagai bidang misalnya ekonomi, IPA, keteknikan dan lain sebagainya, seperti hubungan antara jumlah suatu barang dengan harganya, dalam hubungan antara harga dengan permintaan atau penawaran, dalam hubungan antara kekuatan suatu zat radioaktif dengan waktu.

B. Pengertian Fungsi

Perhatikan diagram dibawah ini:



Gb. 2.4

Relasi fungsional atau sering disingkat fungsi sering juga disebut dengan istilah pemetaan (mapping) didefinisikan sebagai berikut:

Definisi: *Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi yang memasangkan setiap elemen dari A secara tunggal , dengan elemen pada B.*

Ditulis f : A $\rightarrow$ B dibaca "fungsi f pemetaan A ke dalam / into B"

Apabila f memetakan suatu elemen x $\in$ A ke suatu y $\in$ B dikatakan bahwa y adalah peta dari x oleh f dan peta ini dinyatakan dengan notasi f(x), dan biasa ditulis dengan f:x $\rightarrow$ f(x), sedangkan x biasa disebut prapeta dari f(x)

Himpunan A dinamakan daerah asal (domain) dari fungsi f , sedangkan himpunan B disebut daerah kawan (kodomain) sedangkan himpunan dari semua peta di B dinamakan daerah hasil (range) dari fungsi f tersebut.

Contoh 1:

Diagram sebagaimana pada G.b. 2.4 di atas adalah fungsi karena pertama, terdapat *relasi* (yang melibatkan dua himpunan yakni A dan B) dan kedua, pemasangan s*etiap elemen A adalah secara tunggal.*

Contoh 2 :

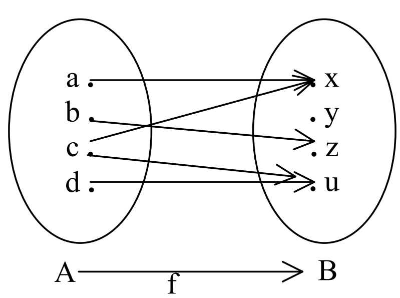


Diagram di samping bukan merupakan fungsi karena ada elemen A yang dipasangkan *tidak* secara tunggal dengan elemen pada B

Contoh 3 :

Diketahui A = {x | -3 $\leq$ x < 3, x $\in$ R} dan suatu fungsi f: A $\rightarrow$ R

Ditentukan oleh rumus $f(x) = x^2 + 1$

a. Carilah f(-1), f(0) dan prapeta dari 5

b. Dengan melukis grafik, tentukan daerah hasil dari fungsi f.

c. Jelaskan bahwa f adalah suatu fungsi.

Jawab:

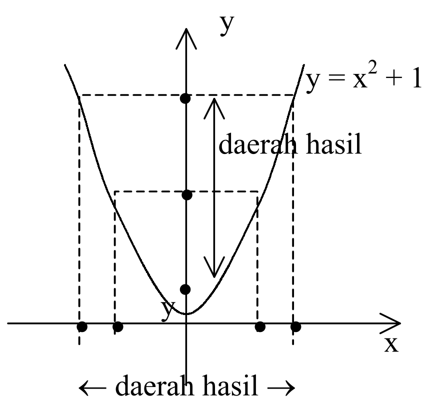
a. $f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$

$f(0) = 0^2 + 1 = 1$

Prapeta dari 5 $\Rightarrow x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \underline{+}2$

Sehingga prapeta dari 5 adalah 2 atau –2

b.



Gb.2.5

Dibuat grafik $y= x^2 + 1$

$f(-3) = (-3)^2 + 1 =10$

$f(3) = (3)^2 + 1 = 10$

titik balik (0,1)

Jadi daerah hasil dari fungsi f adalah:

$R = \{ y \mid 1 \leq y \leq 10, y \in R \}$, karena nilai f(x) = y terletak pada interval tersebut sebagaimana terlihat pada sumbu y.

c. Karena f suatu relasi dimana setiap elemen pada domain A (sumbu x) dipasangkan secara tunggal maka f merupakan fungsi.

C.Sifat Fungsi

Dengan memperhatikan bagaimana elemen-elemen pada masing-masing himpunan A dan B yang direlasikan dalam suatu fungsi, maka kita mengenal tiga sifat fungsi yakni sebagai berikut :

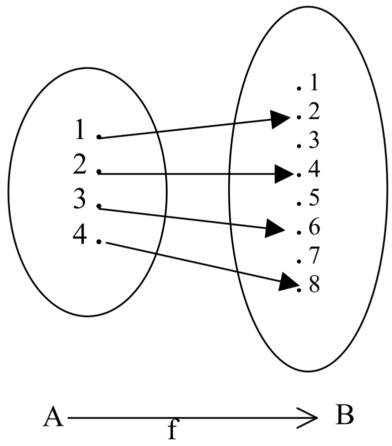
1. Injektif (Satu-satu)

Misalkan fungsi f menyatakan A ke B maka fungsi f disebut suatu fungsi satu-satu (injektif), apabila setiap dua elemen yang berlainan di A akan dipetakan pada dua elemen yang berbeda di B. Selanjutnya secara singkat dapat dikatakan bahwa $f:A\rightarrow B$ adalah fungsi injektif apabila $a \neq a'$ berakibat $f(a) \neq f(a')$ atau ekuivalen, jika $f(a) = f(a')$ maka akibatnya $a = a'$.

Contoh:

1. Fungsi f pada R yang didefinisikan dengan $f(x) = x^2$ bukan suatu fungsi satu-satu sebab f(-2) = f(2).

2.



Adapun fungsi pada A = {bilangan asli} yang didefinisikan dengan f(x) = 2x adalah fungsi satu-satu, sebab kelipatan dua dari setiap dua bilangan yang berlainan adalah berlainan pula.

Gb. 2.10

2. Surjektif (Onto)

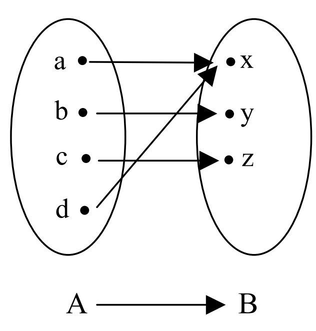
Misalkan f adalah suatu fungsi yang memetakan A ke B maka daerah hasil f(A) dari fungsi f adalah himpunan bagian dari B, atau $f(A) \subset B$.

Apabila f(A) = B, yang berarti setiap elemen di B pasti merupakan peta dari sekurang-kurangnya satu elemen di A maka kita katakan f adalah suatu fungsi surjektif atau “f memetakan A Onto B”

Contoh:

1. Fungsi f: $R \rightarrow R$ yang didefinisikan dengan rumus $f(x) = x^2$ bukan fungsi yang onto karena himpunan bilangan negatif tidak dimuat oleh hasil fungsi tersebut.

2.



Misal A = {a, b, c, d} dan B = {x, y, z} dan fungsi f: $A \rightarrow B$ yang didefinisikan dengan diagram panah adalah suatu fungsi yang surjektif karena daerah hasil f adalah sama dengan kodomain dari f (himpunan B).

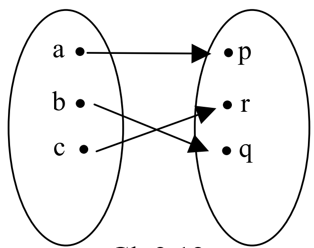
Gb.2.11

c.Bijektif (Korespondensi Satu-satu)

Suatu pemetaan f: A→B sedemikian rupa sehingga f merupakan fungsi yang injektif dan surjektif sekaligus, maka dikatakan "f adalah fungsi yang bijektif" atau " A dan B berada dalam korespondensi satu-satu".

Contoh:

1)



Gb.2.12

Relasi dari himpunan A = {a, b, c} ke himpunan B = {p, q, r} yang didefinisikan sebagai diagram di samping adalah suatu fungsi yang bijektif.

2. Fungsi f yang memasangkan setiap negara di dunia dengan ibu kota negara-negara di dunia adalah fungsi korespondensi satu-satu (fungsi bijektif), karena tidak ada satu kotapun yang menjadi ibu kota dua negara yang berlainan.

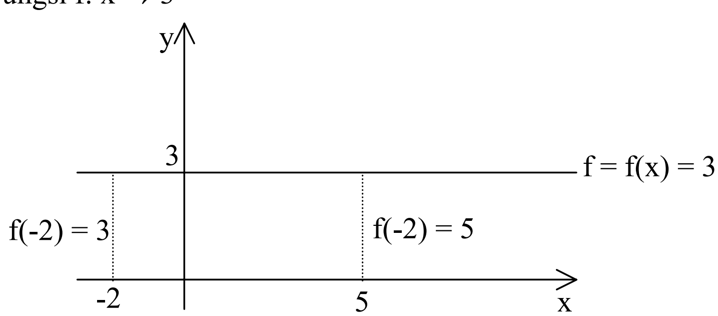
D.Jenis – jenis Fungsi

Jika suatu fungsi f mempunyai daerah asal dan daerah kawan yang sama, misalnya D, maka sering dikatakan fungsi f pada D. Jika daerah asal dari fungsi tidak dinyatakan maka yang dimaksud adalah himpunan semua bilangan real (R). Untuk fungsi-fungsi pada R kita kenal beberapa fungsi antara lain sebagai berikut.

a. Fungsi Konstan

f : x→ C dengan C konstan disebut fungsi konstan (tetap). Fungsi f memetakan setiap bilangan real dengan C.

Fungsi f: x → 3

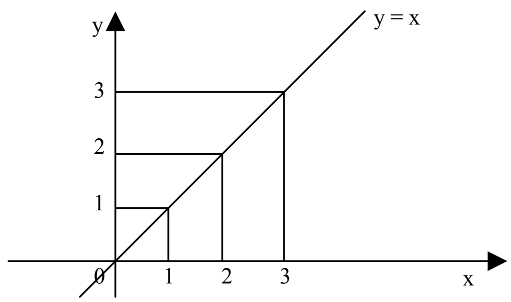


f (-2) = 3
f (0) = 3
f (5) = 3

Gb. 2.6

b. Fungsi Identitas

Fungsi R→R yang didefinisikan sebagai: *f : x→ x disebut fungsi identitas.*



f(1) = 1

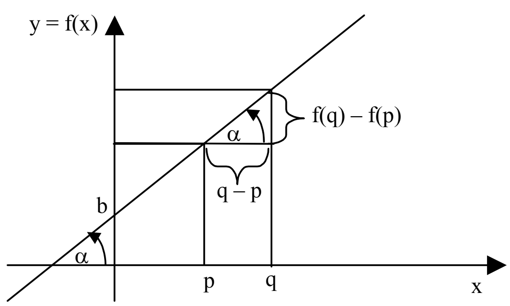
f(2) = 2

f(3) = 3

Gb.2.7

c.Fungsi Linear

Fungsi pada bilangan real yang didefinisikan : f(x) = ax + b, a dan b konstan dengan a ≠ 0 disebut fungsi liniar.



Gb.2.8

$$\begin{aligned} f(x) = ax + b \rightarrow f(p) &= ap + b \\ f(q) &= aq + b \\ \hline f(q) - f(p) &= a(q-p) \end{aligned} \;-$$

$\frac{f(q)-(f(p)}{q-p}$ = a = tan α , disebut gradien dari garis y = ax + b tersebut.

Jika garis y = mx + c maka gradiennya adalah m dan melalui titik (0,c).

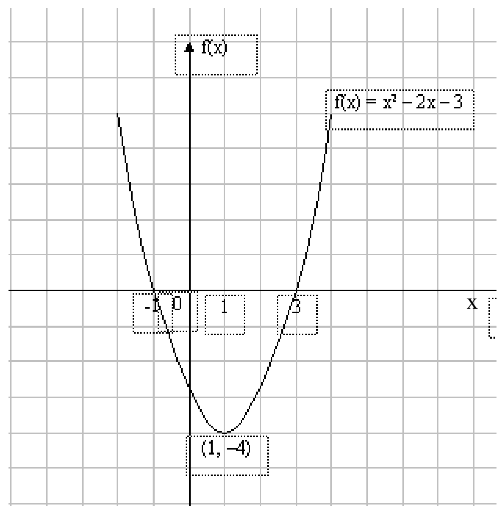
d.Fungsi Kuadrat

Fungsi f: R→R yang ditentukan oleh rumus $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan $a,b,c \in R$ dan $a \neq 0$ disebut fungsi kuadrat.

Contoh:

Gambarlah sketsa grafik fungsi $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Jawab:



Gb.2.9

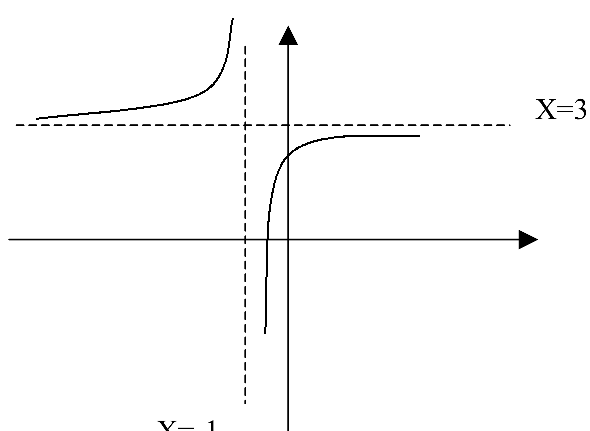
e.Fungsi Rasional

Fungsi rasional adalah suatu fungsi terbentuk $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ dengan P(x) dan Q(x) adalah suku banyak dalam x dan $Q(x) \neq 0$.

Contoh :

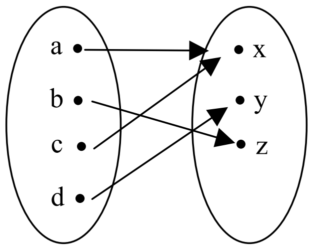
$f(x) = \dfrac{3x+2}{x+1}$

maka grafiknya adalah sebagai berikut :

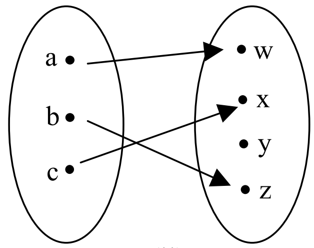


Latihan 1 :

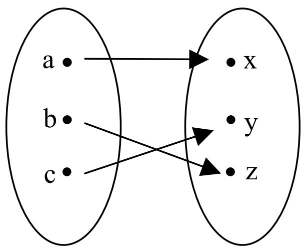
1. 1. Diantara fungsi-fungsi berikut, manakah yang merupakan fungsi injektif, surjektif, serta bijektif? Berilah penjelasannya!



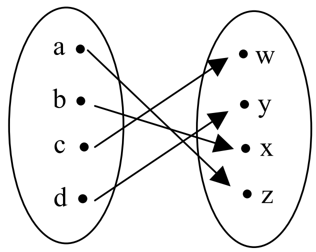
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

2. Diketahui himpunan D = {1,2,3,4,5}. Suatu relasi pada D ini, manakah yang berupa pemetaan dan berikan alasannya !

   a.R = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)}

   b.R = {(1,2),(2,3),(2,4),(4,5),(5,1)}

   c.R = {(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2)}

3.Suatu fungsi f: R$\rightarrow$R ditentukan oleh f(x) = $x^2 + 2$

   a.Tentukan f(-1), f(a), dan f(1).

   b.Tentukan a jika f(a) = 27

   c.Anggota manakah dari daerah asal yang mempunyai peta 18 ?

4.Manakah yang merupakan fungsi injektif, surjektif, atau bijektif dari fungsi dengan domain {1, 2, 3, 4}, yang didefinisikan sebagai berikut?

   a. R = {(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7); jika kodomainnya {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

   b. R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1); jika kodomainnya {1, 2, 3}

   c. R = {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1); jika kodomainnya {1, 2, 3, 4}

   d. R = {(1, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 4); jika kodomainnya {1, 2, 3, 4, 5, 6}

5. Misalkan A = [–1, 1] = {x|$-1 \le x \le 1$, $\in$ R}. Apakah fungsi di bawah ini surjektif?

   a. f: A $\rightarrow$ A ; didefinisikan f(x) = x

   b. f: A $\rightarrow$ A ; didefinisikan f(x) = 2x – 1

   c. f: A $\rightarrow$ A ; didefinisikan f(x) = x^2

   d. f: A $\rightarrow$ A ; didefinisikan f(x) = x^3

BAB III

FUNGSI LINEAR, FUNGSI KUADRAT DAN PENERAPANNYA

> *Setelah mengikuti pembelajaran Bab III peserta diklat diharapkan dapat menjelaskan tentang fungsi linier, fungsi kuadrat, dan penerapannya dalam bidang ekonomi*

A.Fungsi Linier

Bentuk umum fungsi linier : $y = f(x) = ax + b$, $a, b \in R$ dan $a \neq 0$. Grafik fungsi linier berupa garis lurus. Untuk menggambar grafik fungsi linier bisa dilakukan dengan dua cara yaitu dengan membuat tabel dan dengan menentukan titik potong dengan sumbu-x dan sumbu-y.

Contoh :

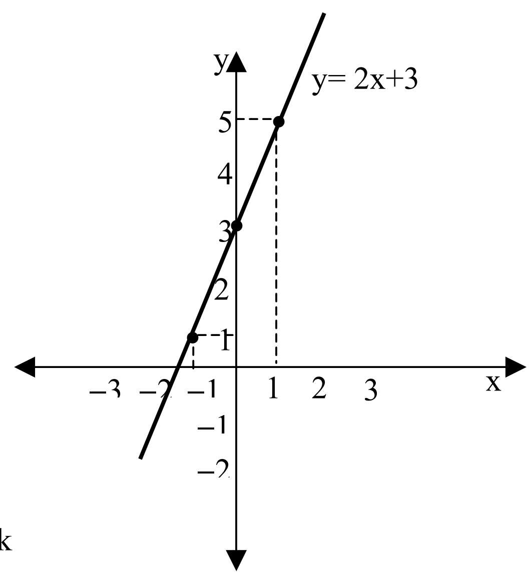
Gambarlah grafik fungsi $y = 2x + 3$

Penyelesaian :

-Dengan membuat tabel :

$y = 2x + 3$

x	− 1	0	1
y	1	3	5



Dari tabel diperoleh titik-titik berupa pasangan koordinat, kita gambar titik tersebut dalam bidang Cartesius kemudian dihubungkan, sehingga tampak membentuk garis lurus.

-Dengan menentukan titik-titik potong dengan sumbu-x dan sumbu-y

$y=2x + 3$

Titik potong grafik dengan sumbu-x:

$y=0 \rightarrow 0 = 2x + 3$

$-2x = 3$

$x = -\frac{3}{2}$

sehingga titik potong grafik dengan sumbu x adalah $\left(-\frac{3}{2},0\right)$

Titik potong grafik dengan sumbu-y:

$x=0 \rightarrow y = 2x + 3$

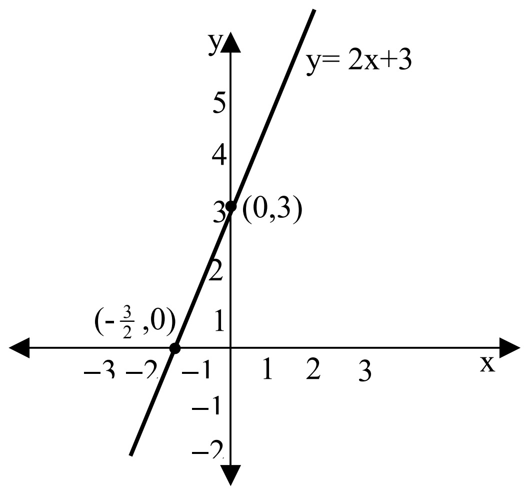
$y = 2.0 + 3$

$y = 0 + 3$

$y = 3$

sehingga titik potong grafik dengan sumbu-y adalah (0,3)

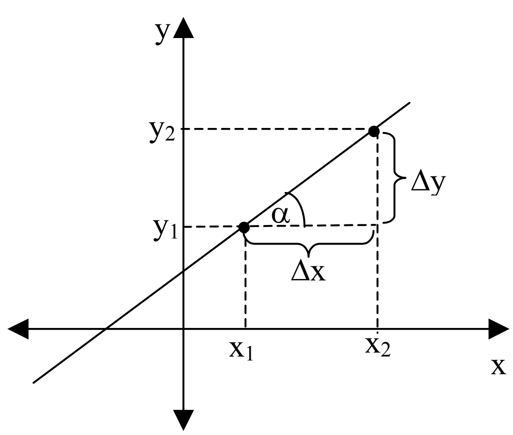
Kedua titik potong tersebut digambar dalam bidang Cartesius kemudian dihubungkan sehingga tampak membentuk garis lurus.



1. *Gradien*

   Gradien atau koefisien arah (m) adalah konstanta yang menunjukkan tingkat kemiringan suatu garis.

   Perhatikan gambar berikut ini :



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Persamaan garis y = mx + c, dengan m, c $\in$ R, dalam hal ini m, c adalah konstanta, dengan m melambangkan gradien / koefisien arah garis lurus.

Pada gambar di atas, misalkan α adalah sudut antara garis horisontal (sejajar sumbu x) dan grafik fungsi linier dengan arah putaran berlawanan arah dengan arah putaran jarum jam, maka gradien dapat pula didefinisikan sebagai

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha$. Jadi $\boxed{m = \ tg\ \alpha.}$

Catatan :

a. Jika m = 0 maka grafik sejajar dengan sumbu-x dan ini sering disebut sebagai *fungsi konstan*.

b. Jika m > 0 maka grafik miring ke kanan (0°<α<90°)

c. Jika m < 0 maka grafik miring ke kiri (90°<α<180°)

2. *Menentukan persamaan garis melalui satu titik dan bergradien m.*

Misalkan garis y = mx + c melalui titik P (x_1,y_1), setelah nilai koordinat titik P disubstitusikan ke persamaan garis tersebut diperoleh:

$$\begin{array}{rl} y = mx + c & \\ y_1 = mx_1 + c & - \\ \hline y - y_1 = m(x - x_1) & \end{array}$$

Jadi rumus persamaan garis melalui titik P (x_1,y_1), dan bergradien m adalah

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

3. *Menentukan persamaan garis melalui dua titik.*

Persamaan garis melalui dua titik A (x_1,y_1) dan B (x_2,y_2) dapat dicari dengan langkah sebagai berikut:

persamaan garis melalui titik A (x_1,y_1) dengan memisalkan gradiennya m adalah

$y - y_1 = m(x - x_1)$ .... (i)

karena garis ini juga melalui titik B (x_2,y_2), maka $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$, sehingga diperoleh gradiennya

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .... (ii) persamaan (ii) disubstitusikan ke persamaan (i) diperoleh

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x-x_2}.$$

Jadi persamaan garis melalui dua titik A (x_1,y_1) dan B (x_2,y_2) adalah

$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x-x_2}}$$

4. *Menentukan titik potong antara dua garis.*

   Misalkan dua garis g_1 dan g_2 saling berpotongan di titik P (x,y) maka nilai x dan y harus memenuhi kedua persamaan garis tersebut. Titik potong dua garis dapat dicari dengan metode substitusi, eliminasi, atau membuat sketsa grafiknya.

5. *Hubungan gradien dari dua garis.*

   a. Garis g_1 yang bergradien m_1 dikatakan *sejajar* dengan garis g_2 yang bergradien m_2 jika memenuhi $m_1 = m_2$

   b. Garis g_1 yang bergradien m_1 dikatakan *tegak lurus* dengan garis g_2 yang bergradien m_2 jika memenuhi $m_1 \cdot m_2 = -1$

6. *Fungsi linier dalam ekonomi*

   Domain : jumlah barang/jasa (quantity) dilambangkan dengan Q

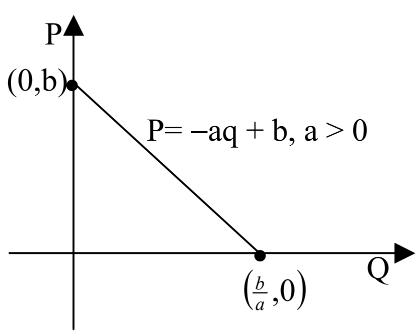
   Kodomain : harga (price) dilambangkan dengan P

   a. *Fungsi Permintaan*

   Fungsi permintaan menyatakan hubungan antara banyaknya suatu barang yang diminta dengan variabel harga.

   Fungsi permintaan berasal dari hukum permintaan bahwa:

   - Jika harga suatu barang naik maka permintaan akan turun
   - Jika harga suatu barang turun maka permintaan akan naik.

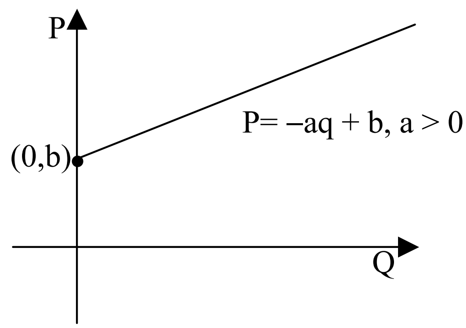


b. *Fungsi penawaran*

Fungsi penawaran menyatakan hubungan antara banyaknya suatu barang yang ditawarkan dengan variabel harga.

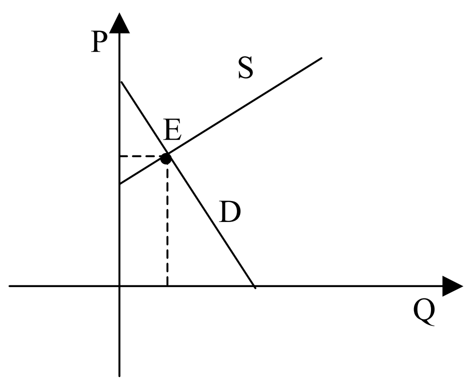
Fungsi penawaran berasal dari hukum penawaran bahwa:

- Jika harga suatu barang naik maka jumlah barang yang ditawarkan akan meningkat
- Jika harga suatu barang turun maka jumlah barang yang ditawarkan akan menurun



c. *Keseimbangan pasar*

Keseimbangan pasar terjadi jika harga yang diminta sama dengan harga yang ditawarkan, atau jumlah barang yang diminta pasar sama dengan jumlah barang yang ditawarkan.



D: fungsi permintaan (*demand*)
S: fungsi penawaran (*supply*)

Titik keseimbangan pasar (E) merupakan titik perpotongan antara fungsi permintaan (D) dan fungsi penawaran (S).

B. Beberapa Contoh Aplikasi Fungsi Linier dalam Ekonomi

1. *Model Biaya Linier*

   Biaya total = Biaya Tetap + Biaya Variabel

   atau : $y_c = m\,x + b$

   Contoh :

   Sebidang tanah dengan harga perolehan Rp. 50.000.000,00 diperkirakan mengalami tingkat kenaikan konstan Rp. 200.000,00 per tahun dalam kurun waktu 5 tahun. Tentukan persamaan garis harga tanah tersebut dan nilai tanah setelah 5 tahun !

   Penyelesaian :

   Misalkan x (tahun) sebagai kurun waktu dan y (Rp) sebagai nilai harga. Dari data diketahui bahwa :

   y = Rp. 50.000.000,00 jika x = 0

   gradien = m = Rp. 200.000,00 (karena tiap tahun bertambah Rp. 200.000,00), dengan demikian diperoleh persamaan garis harga;

   $$y = m\,x + b$$
   $$y = 200.000\,x + 50.000.000$$

   Lima tahun sejak perolehan, nilai tanah dapat diperoleh dengan

   $$\begin{aligned} y &= 200.000 \times 5 + 50.000.000 \\ &= 1.000.000 + 50.000.000 \\ &= \text{Rp. } 51.000.000 \end{aligned}$$

2. *Titik Pulang Pokok*

   Jika y_c adalah biaya produksi dan y_r adalah biaya diperoleh dari penjualan, maka nilai titik pulang pokok (*break event point*) diperoleh jika $y_c = y_r$.

   Contoh :

   Sebuah pabrik memproduksi mainan anak-anak dengan biaya variabel Rp. 4.000,00 per buah dan biaya tetap tiap bulannya Rp. 12.000.000,00. Jika mainan itu dijual seharga Rp. 10.000,00 per buah, tentukan titik pulang pokok !

   Penyelesaian :

   Misalkan mainan yang diproduksi tiap bulan x buah. Jadi total biaya model biaya linier $y_r = 4.000\,x + 12.000.000$. Mainan yang terjual tiap bulan sebanyak x buah juga. Dengan demikian dipenuhi $y_c = 10.000$ x,sehingga titik pulang pokok diperoleh dari

$$y_r = y_c$$

$$4.000\,x + 12.000.000 = 10.000\,x$$

$$12.000.000 = 10.000\,x - 4.000\,x$$

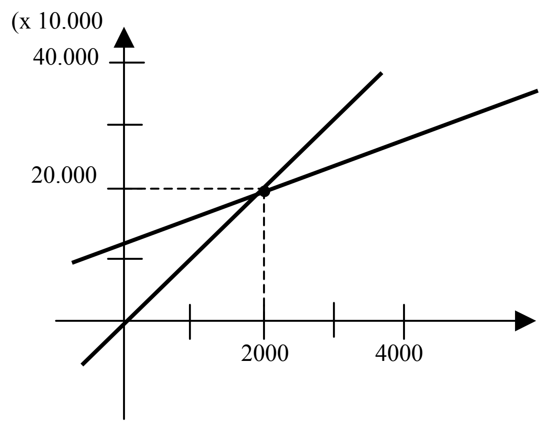
$$= 6.000\,x$$

$$x = 2.000$$

Dengan mensubstitusikan nilai x ke dalam $y_c = 10.000$ x, didapat

$y_c = 10.000 \times 2.000$

$= 20.000.000$



Jadi operasi titik pulang pokok pabrik itu terjadi pada produksi 2.000 unit yang menghasilkan titik pulang pokok Rp. 20.000.000,00

3. Keseimbangan Pasar

Keseimbangan pasar terjadi pada suatu harga dimana kuantitas permintaan sama dengan kuantitas persediaan, atau fungsi permintaan sama dengan fungsi penawaran, yang dapat dinyatakan sebagai D = S

Contoh:

Jika persamaan permintaan (D) dan persediaan (S) masing-masing

D : $3p + 5x = 22$ ....(i)

S : $2p - 3x = 2$ ....(ii)

Tentukan nilai x dan p pada keseimbangan pasar!

Penyelesaian:

Persamaan (i) dan (ii) bentuk sistem persamaan linier untuk dua variabel p dan x.

Selesaikan dengan metode eliminasi, yakni mengalikan persamaan (i) dengan 3 dan mengalikan persamaan (ii) dengan 5 kita peroleh :

$$\begin{array}{rl} 9p + 15x = 66 & \\ 10p - 15x = 10 & \\ \hline 19p = 76 & + \\ p = 4 & \end{array}$$

dengan mensubstitusikan p = 4 pada persamaan (i), kita peroleh

3 (4) + 5x = 22, maka x = 2.

Jadi keseimbangan pasar terjadi apabila p = 2 dan x = 4.

C. Fungsi Kuadrat

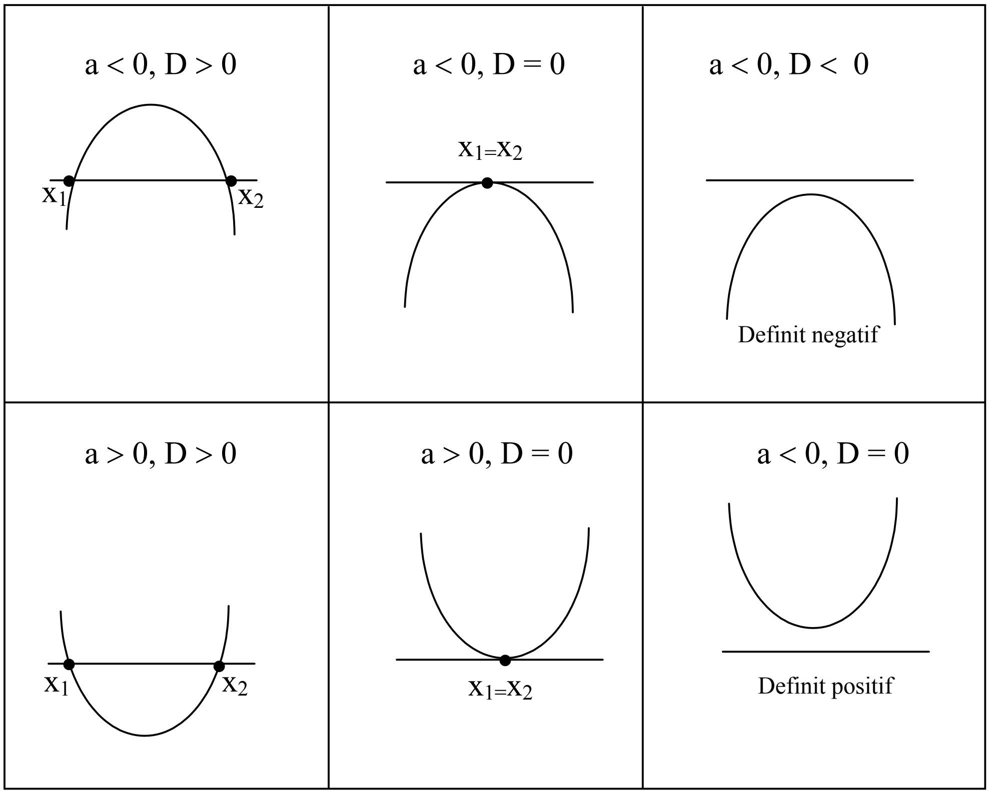
Bentuk umum fungsi kuadrat adalah $y = ax^2 + bx + c$ dengan $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$. Grafik fungsi kuadrat berbentuk parabola maka sering juga disebut fungsi parabola. Jika $a > 0$, parabola terbuka ke atas sehingga mempunyai titik balik minimum, dan jika $a < 0$ parabola terbuka ke bawah sehingga mempunyai titik balik maksimum.

Langkah-langkah dalam menggambar grafik fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$

1. Tentukan pembuat nol fungsi $\rightarrow$ y = 0 atau f(x) = 0

   Pembuat nol fungsi dari persamaan kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ diperoleh jika $ax^2 + bx + c = 0$. Sehingga diperoleh nilai x yang memenuhi $ax^2 + bx + c = 0$ Nilai ini tidak lain adalah absis titik potong dengan sumbu-x, sedangkan untuk menentukan titik potong dengan sumbu-y, dapat dilakukan dengan mensubstitusikan nilai x tadi pada persamaan kuadrat semula.
2. Tentukan sumbu simetri $x = \dfrac{-b}{2a}$
3. Tentukan titik puncak P (x,y) dengan $x = \dfrac{-b}{2a}$ dan $y = \dfrac{D}{-4a}$; dengan nilai diskriminan $D = b^2 - 4ac$

   Jika ditinjau dari nilai a dan D maka sketsa grafik parabola sebagai berikut:



<u>Catatan :</u>

Persamaan Kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dapat dicari akar-akarnya dengan:

- pemfaktoran
- melengkapi bentuk kuadrat sempurna
- Rumus abc: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Contoh :

Gambarlah sketsa grafik fungsi $y = x^2 - 6x + 5$

Penyelesaian :

a. Menentukan pembuat nol fungsi, dengan pemfaktoran diperoleh

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0$$

$$x = 1 \text{ atau } x = 5$$

b. Menentukan sumbu simetri $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-6)}{2.1} = \dfrac{6}{2} = 3$

c. Menentukan titik puncak P (x,y)

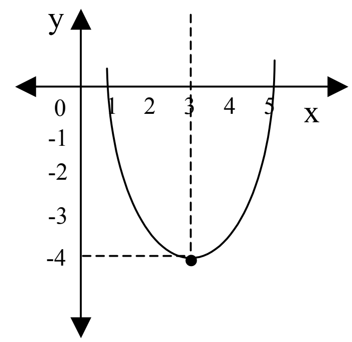
Karena nilai x sudah diperoleh maka tinggal mencari nilai y dengan substitusi x = 3 pada fungsi semula

$y = 3^2 - 6\,(3) + 5$

$= 9 - 18 + 8$

$= -4$

Jadi puncak parabola adalah titik (3, –4) sehingga sketsa grafiknya seperti pada gambar di samping.



D. Beberapa Contoh Aplikasi Fungsi Kuadrat dalam Ekonomi

Contoh 1:

Sebuah pabrik menjual produknya Rp. 1.000,00 per unit. Biaya pembuatan x unit didapat menurut persamaan $C = 10.000 + 100x + x^2$. Berapa banyak unit harus dan dijual untuk menerima laba Rp. 192.500,00 ?

Penyelesaian:

Kita mulai dengan memisalkan penerimaan dari penjualan x unit = 1.000x.

Biaya pembuatan x unit = $10.000 + 100x + x^2$

Laba dari penjualan x unit = $1.000x - (10.000 + 100x + x^2)$

Dengan demikian dipenuhi persamaan

$$1.000x - (10.000 + 100x + x^2) = 192.500$$

Penyelesaian secara aljabar diperoleh

$$900x - 10.000 - x^2 = 192.500$$

$$x^2 - 900x + 202.500 = 0$$

$$(x - 450)^2 = 0$$

$$x_1 = x_2 = 450$$

Jadi untuk menerima laba Rp. 192.500, perlu dibuat 450 unit.

Contoh 2 :

Permintaan barang-barang yang diproduksi oleh sebuah industri diberikan dengan persamaan $p^2 + x^2 = 109$, dimana p ialah harga dan x adalah kuantitas permintaan. Persediaan diberikan dengan p = x + 7. Berapakah keseimbangan harga dan kuantitas ?

Penyelesaian:

Keseimbangan pasar dan kuantitas adalah nilai positip p dan x yang memenuhi persamaan permintaan dan persediaan.

$p^2 + x^2 = 109$ ....(i)

$p = x + 7$ .... (ii)

Substitusikan nilai p dari persamaan (ii) ke dalam persamaan (i) diperoleh

$(x + 7)^2 + x^2 = 109$

$2x^2 + 14x + 49 = 109$

$x^2 + 7x - 60 = 0$

$(x + 12)(x - 5) = 0$

$x_1 = -12$ atau $x_2 = 5$

Nilai x negatif tidak dapat diterima, jadi x = 5. Dengan mensubstitusikan x = 5 ke dalam persamaan (ii) kita peroleh p = 5 + 7 = 12.

Jadi keseimbangan harga ialah 12 dan kuantitas ialah 5.

Latihan 2:

1. Tentukan persamaan garis yang melalui
   a. titik M(-1,2) dan N(1,8)
   b. titik (3,4) dan membentuk sudut 60° terhadap sumbu x positif
2. Diketahui gradien garis g adalah $-\frac{1}{2}$. Jika garis tersebut melalui titik A (2,3) dan B(k,6), tentukan nilai k !
3. Tentukan persamaan garis l yang melalui R (3,1) dan tegak lurus garis PQ dimana titik P (2,3) dan Q (6,5).
4. Tentukan keseimbangan harga dan kuantitas untuk kurva permintaan dan persediaan, jika D: $p^2 + x^2 = 25$ dan S: $p = x + 1$.
5. Sebuah pabrik detergen dapat menjual 10.000 sachet per minggu,jika harga harga Rp. 1.200,00 per sachet. Akan tetapi penjualan bertambah menjadi 12.000 sachet apabila harga diturunkan menjadi Rp. 1.100,00 per sachet. Tentukan hubungan permintaan kalau dianggap hubungan itu linier.