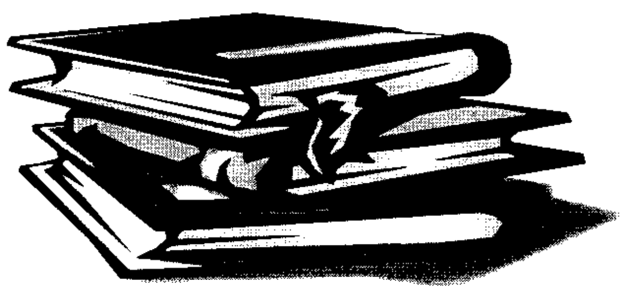
PENALARAN, PEMECAHAN MASALAH DAN KOMUNIKASI DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA

Disajikan pada:

Diklat Instruktur/Pengembang Matematika SMP
Jenjang Dasar
Tanggal 10 s.d. 23 Oktober 2004



Oleh

Fadjar Shadiq, M.App.Sc

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
PUSAT PENGEMBANGAN PENATARAN GURU (PPPG) MATEMATIKA
YOGYAKARTA
2004

Daftar Isi

Bab I

Pendahuluan

A. Latar Belakang

Penyempurnaan, pengembangan, dan inovasi pembelajaran matematika melalui revisi kurikulum akan selalu dan akan terus dilaksanakan Depdiknas untuk meningkatkan mutu pendidikan di Indonesia, yang pada akhirnya dimaksudkan untuk meningkatkan mutu Sumber Daya Manusia Indonesia. Salah satu kelebihan dari kurikulum berbasis kompetensi terbaru ini adalah dengan masuknya pemecahan masalah (*problem-solving*), penalaran (*reasoning*), dan komunikasi (*communication*) sebagai kompetensi dasar di samping kompetensi dasar lainnya yang sudah biasa seperti bilangan, perbandingan, sudut, dan segitiga. Karenanya, dalam rangka menyongsong berlakunya Kurikulum 2004, salah satu materi yang akan dibahas dalam Diklat yang diadakan PPPG Matematika adalah: '*Penalaran dan Komunikasi serta Pemecahan Masalah dalam Proses Pembelajaran Matematika di SMP'*. Dengan bahan ajar ini, diharapkan para guru matematika akan terbantu selama melaksanakan proses pembelajaran di kelasnya.

B. Tujuan Penulisan

Bahan ajar ini disusun dengan maksud untuk memberikan tambahan pengetahuan berupa wawasan bagi guru matematika yang sedang mengikuti pelatihan di PPPG Matematika agar dapat melaksanakan proses pembelajaran di kelas sesuai tuntutan Kurikulum 2004, dengan harapan:

1. Dapat digunakan sebagai salah satu sumber mengenai konsep pemecahan masalah (*problem-solving*), penalaran (*reasoning*), dan komunikasi (*communication*) selama proses pembelajaran di kelas.
2. Dapat digunakan sebagai salah satu sumber bagi para guru matematika dalam mengaplikasikan konsep tersebut selama proses pembelajaran di kelas sehingga bahan yang disajikan para guru dapat lebih meningkatkan keterampilan bernalar, memecahkan masalah, dan berkomunikasi siswa, serta dapat lebih meningkatkan keterampilan (kemahiran) matematika para siswa.

C. Cara Penggunaan Paket

Pembahasan pada paket ini menitik-beratkan pada pengertian serta implikasi pemecahan masalah (*problem-solving*), penalaran (*reasoning*), dan komunikasi (*communication*) yang merupakan kompetensi dasar yang dapat diperoleh melalui pembelajaran seperti bilangan, perbandingan, sudut, dan segitiga. Di samping itu, pada paket ini dikemukakan juga tentang hal-hal penting yang perlu mendapat perhatian para guru di saat mengaplikasikan atau menerapkan ketiga konsep kompetensi dasar nonmateri tadi di kelasnya. Karenanya, para pemakai paket ini disarankan untuk membaca lebih dahulu konsepnya sebelum mengaplikasikan pelaksanaannya di kelas. Pada akhirnya, jika para pemakai paket ini mengalami kesulitan, membutuhkan klarifikasi, maupun memiliki saran atau kritik yang membangun, sudilah kiranya menghubungi penulis (*fadjar_p3g@yahoo.com*) atau melalui lembaga PPPG Matematika melalui surat ke:

PPPG Matematika

Kotak Pos 31 YKBS, Yogyakarta,

melalui email: p3gmatyo@indosat.net.id atau melalui faks: (0274)885752.

Bab II

Penalaran Dalam Pembelajaran Matematika

D. Pengertian Penalaran

Selama mempelajari Matematika di kelas, aplikasi penalaran sering ditemukan meskipun tidak secara formal disebut sebagai belajar bernalar. Beberapa contohnya adalah:

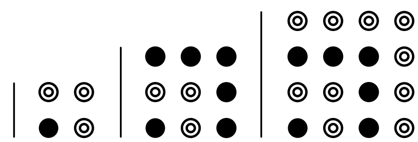
1. Untuk menentukan hasil dari $7 + 8$, berdasar pengetahuan yang sudah dimiliki para siswa yaitu $7 + 7 = 14$, maka para siswa diharapkan dapat menyimpulkan bahwa $7 + 8$ adalah sama dengan $14 + 1$ atau sama dengan 15.
2. Untuk menentukan hasil dari $7 + 8$, berdasar pengetahuan yang sudah dimiliki yaitu $7 + 3 = 10$ dan $8 = 3 + 5$, para siswa diharapkan dapat menyimpulkan bahwa $7 + 8$ adalah sama dengan $7 + 3 + 5 = 10 + 5 = 15$.
3. Untuk menentukan hasil dari 6×7, berdasar pengetahuan yang sudah dimiliki para siswa yaitu $5 \times 7 = 35$, maka para siswa diharapkan dapat menarik suatu kesimpulan $6 \times 7 = 35 + 7 = 42$.
4. Untuk menentukan hasil dari $998 + 1236$, para siswa dapat mengambil 2 dari 1236 untuk ditambahkan ke 998 sehingga menjadi 1000. Dengan demikian, para siwa dapat dilatih untuk menyimpulkan bahwa $998 + 1236$ sama nilainya dengan $1000 + 1234$ atau sama dengan 2234. Dengan demikian, didapat kesimpulan bahwa $998 + 1236 = 1000 + 1234 = 2234$.
5. Berdasar data dan gambar di bawah ini:

   $1 + 3 = 4 = 2 \times 2$

   $1 + 3 + 5 = 9 = 3 \times 3$

   $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4 \times 4$

   $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5 \times 5$;

   maka siswa diharapkan dapat menarik kesimpulan atau menduga:

   $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 19 = 10 \times 10 = 100$, dan

   $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 99 = 50 \times 50 = 2500$.

6. Jika Johan berumur 10 tahun dan Amir berumur dua tahun lebih tua, maka para siswa diharapkan dapat menentukan umur Amir $10 + 2 = 12$ tahun.
7. Jika besar dua sudut pada suatu segitiga adalah 60^o dan 100^o maka sudut yang ketiga adalah $180^o – (100^o + 60^o) = 20^o$. Hal ini didasarkan pada teori matematika yang menyatakan bahwa jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180^o.
8. Jika $(x – 1)(x + 10) = 0$ maka $x = 1$ atau $x = –10$.

Sejalan dengan contoh-contoh yang telah dikemukakan di atas, dimana telah terjadi proses penarikan kesimpulan dari beberapa fakta yang telah diketahui siswa, maka istilah penalaran (jalan pikiran atau *reasoning*) dijelaskan Keraf (1982: 5) sebagai: “Proses berpikir yang berusaha menghubung-hubungkan fakta-fakta atau evidensi-evidensi yang diketahui menuju kepada suatu kesimpulan”. Sebagai contoh, dari persamaan kuadrat $x^2 + 9x – 10 = 0$ yang telah diketahui, dapat disimpulkan ataupun dibuat pernyataan lain bahwa $x = 1$ atau $x = –10$. Dari pengetahuan tentang besar dua sudut suatu segitiga yaitu 60^o dan 100^o maka dapat disimpulkan ataupun dibuat pernyataan lain bahwa besar sudut yang ketiga pada segitiga itu adalah 20^o. Pada intinya, penalaran merupakan suatu kegiatan, suatu proses atau suatu aktivitas berpikir untuk menarik kesimpulan atau membuat suatu pernyataan baru yang benar berdasar pada beberapa pernyataan yang kebenarannya telah dibuktikan atau diasumsikan sebelumnya.

Sekali lagi, beberapa contoh di atas menunjukkan bahwa aplikasi penalaran telah digunakan para siswa selama proses pembelajaran matematika berlangsung di kelas. Untuk itulah, Depdiknas (2002: 6) menyatakan bahwa “Materi matematika dan penalaran matematika merupakan dua hal yang tidak dapat dipisahkan, yaitu materi matematika dipahami melalui penalaran dan penalaran dipahami dan dilatihkan melalui belajar materi matematika.” Bayangkan sekarang jika para siswa tidak belajar matematika, apa yang akan terjadi dengan keterampilan berpikir mereka? Pola berpikir yang dikembangkan matematika seperti dijelaskan di atas memang membutuhkan dan melibatkan pemikiran kritis, sistematis, logis, dan kreatif. Sekali lagi, bayangkan jika para siswa tidak belajar matematika. Akan cepatkah mereka menarik kesimpulan dari beberapa fakta atau data yang mereka dapatkan ataupun mereka ketahui? Kemampuan bernalar tidak hanya dibutuhkan para siswa ketika mereka belajar matematika maupun mata pelajaran lainnya, namun sangat dibutuhkan setiap manusia di saat memecahkan masalah ataupun di saat menentukan keputusan, sebagaimana dikemukakan mantan Presiden AS Thomas Jefferson dan dikutip Copi (1978: vii) berikut ini: "*In a republican nation, whose citizens are to be led by reason and persuasion and not by force, the art of reasoning becomes of first importance".* Pernyataan itu menunjukkan pentingnya penalaran dan argumentasi dipelajari dan dikembangkan di suatu negara sehingga setiap warga negara akan dapat dipimpin dengan daya nalar (otak) dan bukannya dengan kekuatan (otot) saja. Pendapat mantan Presiden AS Thomas Jefferson di atas sudah seharusnya makin meningkatkan tekad para guru matematika untuk makin meningkatkan kemampuan bernalar para siswanya. Sekali lagi, kemampuan dan keterampilan bernalar ini akan dibutuhkan para siswa dan seluruh warga bangsa ini ketika mereka mempelajari matematika, ilmu lain, maupun ketika mereka terjun langsung ke masyarakat. Dikenal dua macam penalaran, yaitu induksi atau penalaran induktif dan deduksi atau penalaran deduktif. Pertanyaan yang mungkin muncul adalah: “Apa beda kedua penalaran tersebut?” Berikut ini adalah penjelasan tentang perbedaan antara penalaran induktif dan deduktif.

E. Penalaran Induktif dan Deduktif

Untuk menjelaskan perbedaan antara penalaran induktif dan deduktif ini, perhatikan masalah atau pertanyaan berikut, yaitu:

Tunjukkan bahwa jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180^o

Untuk menunjukkan tentang kebenaran pernyataan tersebut, dikenal dua cara dalam proses pembelajaran matematika yang bertumpu pada dua macam penalaran, yaitu berdasar penalaran induktif atau induksi dan penalaran deduktif atau deduksi seperti yang akan dijelaskan di bawah ini:

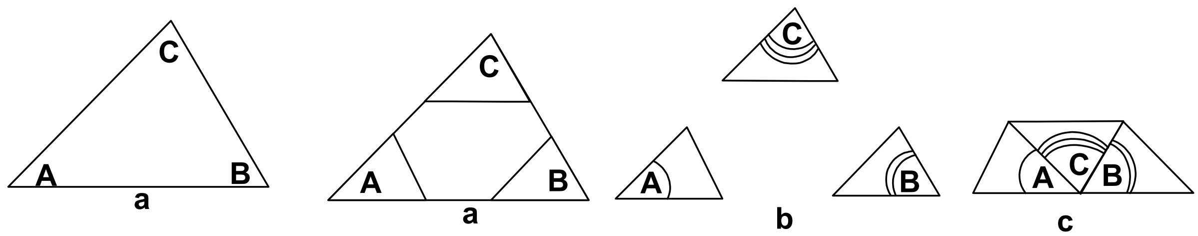
1. Berdasar Penalaran Induktif

Untuk menunjukkan bahwa jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180^o **secara induksi; maka setiap siswa atau setiap kelompok siswa diminta untuk:**

a. **membuat model segitiga sembarang dari kertas,**

b. **mengunting sudut-sudut segitiga tersebut,**

c. **mengimpitkannya, seperti ditunjukkan gambar di bawah ini.**



Dari setiap siswa ataupun kelompok siswa yang melakukan dengan benar kegiatan seperti dipaparkan di atas akan mendapatkan suatu hasil yang sama yaitu ketiga sudut segitiga tersebut jika diimpitkan akan membentuk satu sudut lurus yang menurut pengetahuan yang sudah dipelajari para siswa besarnya adalah 180^o. Contoh di atas menunjukkan tentang adanya segitiga-segitiga yang berbeda atau dikenal juga dengan adanya kasus-kasus khusus namun mengarah ke hasil yang sama, yaitu jumlah besar sudut-sudut segitiga adalah 180^o. Mungkin ada diantara siswa yang membuat segitiga siku-siku, ada yang membuat segitiga sama kaki, sama sisi, dan tentunya ada siswa yang membuat segitiga sembarang. Namun dari beberapa kasus khusus itu, akan didapat hasil yang sama sehingga dapat ditarik suatu kesimpulan yang bersifat umum bahwa jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180^o. Kata lainnya, telah terjadi proses berpikir yang berusaha menghubung-hubungkan fakta-fakta atau evidensi-evidensi khusus yang sudah diketahui menuju kepada suatu kesimpulan yang bersifat umum (*general*).

Dengan demikian jelaslah bahwa induksi merupakan suatu kegiatan, suatu proses atau suatu aktivitas berpikir untuk menarik suatu kesimpulan atau membuat suatu pernyataan baru yang bersifat umum (*general)* berdasar pada beberapa pernyataan khusus yang diketahui benar. Pendapat John Stuart Mill yang sudah diterjemahkan Soekardijo (1988: 132) ke dalam Bahasa Indonesia menyatakan bahwa induksi merupakan suatu kegiatan budi, dimana kita menyimpulkan, bahwa apa yang kita ketahui benar untuk kasus-kasus khusus, juga akan benar untuk semua kasus yang serupa dengan yang tersebut tadi untuk hal-hal tertentu, yang dapat digambarkan dengan diagram di bawah ini.

Jumlah besar sudut segitiga ke-1 = 180^o

Jumlah besar sudut segitiga ke-2 = 180^o

Jumlah besar sudut segitiga ke-3 = 180^o

Jumlah besar sudut segitiga ke-n = 180^o

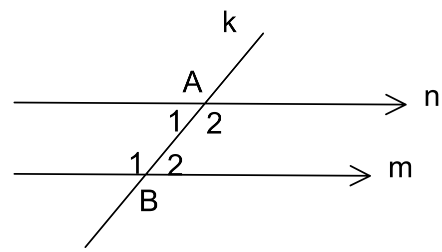
Jadi, jumlah besar sudut setiap segitiga adalah 180^o

–

Pernyataan bahwa jumlah besar sudut setiap segitiga adalah 180^o tersebut terkategori bernilai benar, karena sesuai dengan teori korespondensi (Suriasumantri, 1988), hal-hal yang terkandung didalam pernyataan tersebut sesuai atau cocok dengan keadaan yang sesungguhnya. Artinya, tidak ada satupun segitiga yang jumlah besar sudut-sudutnya bukan 180^o.

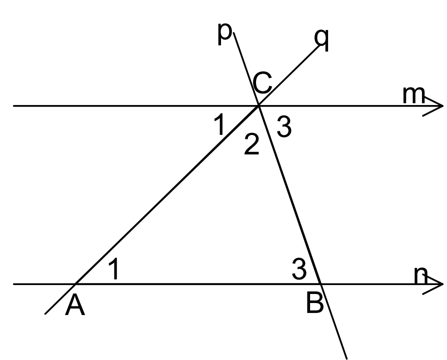
2. Berdasar Penalaran Deduktif

Cara lain untuk membuktikan bahwa 180^o merupakan jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah dengan menggunakan penalaran deduktif yang proses pembuktiannya akan melibatkan teori atau rumus matematika lainnya yang sebelumnya sudah dibuktikan kebenarannya secara deduktif juga, yaitu: "Jika dua garis sejajar dipotong garis lain, maka sudut-sudut dalam berseberangannya adalah sama," seperti ditunjukkan gambar di samping.



Pada gambar di atas, $\angle A1 = \angle B2$ dan $\angle A2 = \angle B1$ karena garis m dan n merupakan dua garis sejajar dan dipotong garis ketiga, sehingga sudut-sudut dalam berseberangannya akan sama besar, yaitu $\angle A1 = \angle B2$ dan $\angle A2 = \angle B1$. Perhatikan ΔABC di bawah ini, dimana melalui titik C telah dibuat garis m yang sejajar dengan garis n, sehingga sudut-sudut dalam berseberangannya akan sama besar, yaitu: $\angle A1 = \angle C1$ dan $\angle B3 = \angle C3$

Dengan demikian, berdasar gambar di samping.



$$\angle A1 = \angle C1$$

$$\angle B3 = \angle C3$$

$$\angle C2 = \angle C2$$

$$\underline{}$$

$$\angle A1 + \angle B3 + \angle C2 = \angle C1 + \angle C3 + \angle C2$$

Karena $\angle C1 + \angle C3 + \angle C2 = 180^o$, maka:

$$\angle A1 + \angle B3 + \angle C2 = \angle A + \angle B + \angle C = 180^o$$

Contoh di atas menunjukkan bahwa pada penalaran deduktif, suatu rumus, teorema, atau dalil tentang jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180^o telah dibuktikan dengan menggunakan atau melibatkan teori maupun rumus matematika sebelumnya yang sudah dibuktikan kebenarannya secara deduktif juga. Sedangkan teori maupun rumus matematika yang digunakan sebagai dasar pembuktian itu tadi telah dibuktikan berdasar teori maupun rumus matematika sebelumnya lagi. Begitu seterusnya. Disamping itu, pembuktian tentang jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180^o telah melibatkan atau menggunakan definisi yang sudah ditetapkan sebelumnya, seperti pengertian sudut lurus besarnya 180^o. Proses di atas dapat digambarkan dengan diagram berikut.

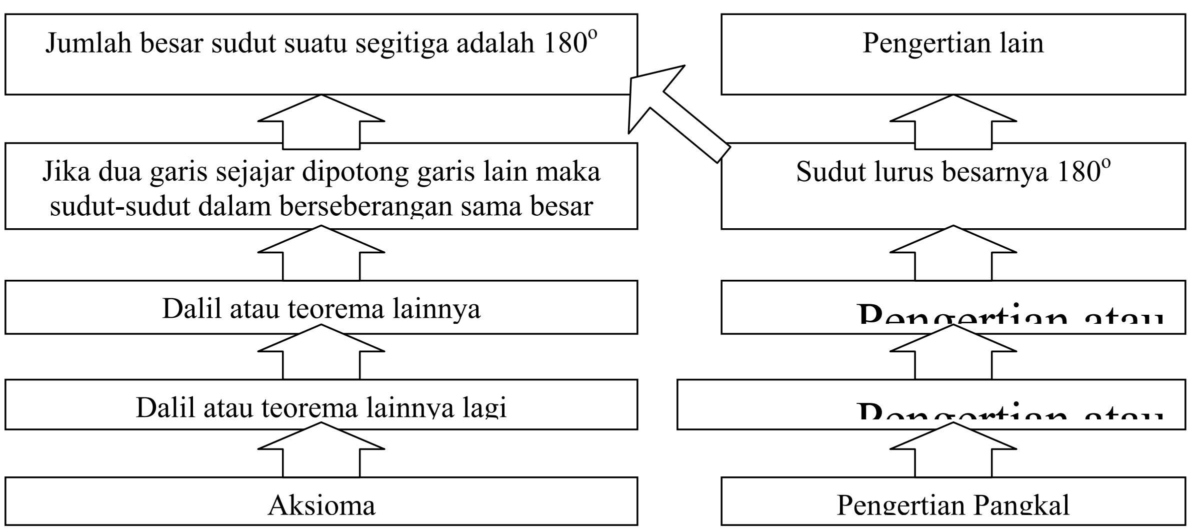


Diagram ini menunjukkan bahwa dalam matematika "benar" atau "nalar" berarti "konsisten" dan diagram di atas menunjukkan juga bahwa bangunan matematika telah disusun dengan dasar pondasi berupa kumpulan pengertian pangkal (unsur pangkal dan

relasi pangkal) dan kumpulan sifat pangkal (aksioma). Aksioma atau sifat pangkal adalah semacam dalil yang kebenarannya tidak perlu dibuktikan namun sangat menentukan, karena sifat pangkal inilah yang akan menjadi dasar untuk membuktikan dalil atau teorema matematika selanjutnya. Depdiknas (2002: 6) menyatakan bahwa: "Unsur utama pekerjaaan matematika adalah penalaran deduktif yang bekerja atas dasar asumsi, yaitu kebenaran suatu konsep atau pernyataan diperoleh sebagai akibat logis dari kebenaran sebelumnya". Disamping itu, pengertian-pengertian matematika secara berantai didefinisikan dari pengertian sebelumnya. Sebagaimana aksioma yang tidak perlu dibuktikan kebenarannya karena akan menjadi dasar pembuktian dalil atau sifat berikutnya, maka pengertian pangkal tidak didefinisikan karena pengertian pangkal akan menjadi dasar pendefinisian pengertian-pengertian atau konsep-konsep matematika berikutnya. Suatu bangunan matematika akan runtuh jika terdapat sifat, dalil, atau teorema yang diturunkan dari aksioma serta pengertian pangkalnya ada yang saling bertentangan (kontradiksi). Itulah sebabnya, pernyataan bahwa jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180^o akan terkategori bernilai benar, karena sesuai dengan teori koherensi, pernyataan yang terkandung didalam kalimat itu bersifat koheren, konsisten, atau tidak bertentangan dengan pernyataan-pernyataan sebelumnya yang dianggap benar. Karenanya, Jacobs (1982: 32) menyatakan: "*Deductive reasoning is a method of drawing conclusions from facts that we accept as true by using logic* ". Artinya, penalaran deduktif adalah suatu cara penarikan kesimpulan dari pernyataan atau fakta-fakta yang dianggap benar dengan menggunakan logika.

Sekali lagi, bangunan pengetahuan matematika didasarkan pada deduksi semata-mata, kepada aksioma-aksioma yang dianggap benar tadi. Suatu hal yang banyak sudah jelas benar pun harus ditunjukkan atau dibuktikan kebenarannya dengan langkah-langkah yang benar secara deduktif. Karena itulah, bangunan matematika dikenal sebagai mata pelajaran yang dikembangkan secara deduktif-aksiomatis, atau sistem aksiomatik.

F. Kelebihan dan Kekurangan dari Induksi dan Deduksi

Sudah dibahas di bagian depan tentang induksi atau penalaran induktif dan yang kedua deduksi atau penalaran deduktif.

Contoh induksi atau penalaran induktif adalah:

Amri mati, Bani tewas, Caca meinggal, …, Zaza wafat, Jadi, semua manusia akan mati.

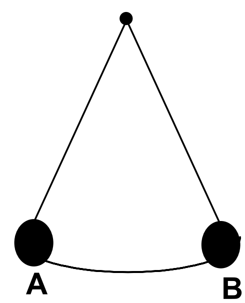
Sedangkan contoh deduksi atau penalaran deduktif adalah:

Semua manusia akan mati dan Amri manusia, jadi, Amri pada suatu saat akan mati.

Dari contoh di atas, nampaklah bahwa induktif merupakan proses penarikan kesimpulan yang bersifat umum (*general*) dari hal-hal atau kasus-kasus yang bersifat khusus, sedangkan deduksi merupakan proses penarikan kesimpulan yang bersifat khusus dari hal-hal atau kasus-kasus yang bersifat umum (*general*). Contoh di atas menunjukkan juga akan benarnya pernyataan Giere (1984: 45) berikut: "*The general characteristic of inductive arguments is that they are kowledge expanding; that is, their conclusions contain more information than all they are premises combined".* Artinya, dari beberapa kasus khusus tentang sifat beberapa orang, disusunlah suatu kesimpulan yang bersifat umum (*general)* tentang sifat manusia yang akan mati. Hal yang sama terjadi pada sifat segitiga, yaitu dari beberapa kasus tentang model segitiga yang digunting sudut-sudutnya lalu diimpitkan, dapat disusun suatu kesimpulan yang bersifat umum (*general)* tentang sifat dari seluruh segitiga yang jumlah besar sudut-sudutnya adalah 180^o. Proses penalaran induktif ini menjadi sangat penting, karena ilmu pengetahuan (terutama ilmu pengetahuan empirik seperti IPA) tidak akan pernah berkembang tanpa adanya penarikan kesimpulan ataupun pembuatan pernyataan baru yang bersifat umum. Hal inilah yang telah menjadi suatu kelebihan dari penalaran induktif (induksi) dibandingkan dengan penalaran deduktif (deduksi).

Contoh kelebihan penalaran induktif ditunjukkan oleh ahli IPA terkenal dari Prancis, yaitu Galileo, di saat menemukan teori yang berkait dengan hubungan antara waktu ayun dan jarak ayun suatu bandul dari A ke B seperti ditunjukkan Tabel dan gambar di bawah ini (Jacobs, 1982: 21).

Jarak Ayun	Waktu Ayun
1 unit	1 detik
4 unit	2 detik
9 unit	3 detik
16 unit	4 detik



Beberapa pertanyaan yang diajukan Jacobs (1982) berkait dengan hasil percobaan yang dilakukan Galileo di atas adalah:

1. **Dari pola-pola pada tabel di atas,** hubungan **apa yang didapat pada jarak ayun dari A ke B dengan waktu ayun suatu bandul dari A ke B?**
2. **Apa yang dapat Anda katakan tentang jarak ayun suatu bandul dari A ke B jika bandul tersebut berayun dari A ke B selama 5 detik?**
3. **Apa yang dapat Anda katakan tentang jarak ayun suatu bandul dari A ke B jika bandul tersebut berayun dari A ke B selama 10 detik?**

Dengan proses atau aktivitas berpikir yang menghubungkan-hubungkan kasus-kasus khusus seperti yang terlihat pada tabel di atas, akan didapati suatu pola, lalu didapat bentuk umum tentang hubungan antara jarak ayun dan waktu ayun dari A ke B. Penemuan itu lalu mengarah ke penemuan berikutnya yang sangat bermanfaat pada masa itu yaitu penemuan jam bandul. Didalam ilmu pengetahuan, proses tersebut dikenal dengan metode eksperimental (*scientific method)*, sedangkan di matematika disebut dengan penalaran induktif. Sekali lagi, contoh ini menunjukkan kelebihan hasil penalaran induktif.

Penalaran induktif sering digunakan para ilmuwan (*scientist*). Namun kelemahan induksi ini dapat ditunjukkan melalui contoh mengenai gas mulia berikut ini. Pada sekitar tahun 1894, para ahli kimia menemukan unsur baru berupa gas yang diberi nama *Argon*. Selama enam tahun berikutnya, ditemukan lima unsur lainnya dengan ciri-ciri khusus yang sama dengan *Argon*. Keenam gas tersebut (*Argon, Helium, Krypton, Neon, Xenon*, dan *Radon)* disebut gas mulia karena keenam unsur tersebut tidak bisa bersenyawa dengan unsur lain. Pernyataan ini jelas bernilai benar karena pernyataan itu menjelaskan atau mendeskripsikan keadaan yang sesungguhnya. Namun pada tahun 1962, pernyataan yang bernilai benar yang menyatakan bahwa gas mulia tidak bisa berkombinasi (bersenyawa) dengan unsur lain menjadi gugur dan selanjutnya akan bernilai salah karena pada tahun tersebut, gas mulia *Xenon* untuk pertama kalinya dapat berkombinasi dengan unsur lain sehingga terbentuk suatu senyawa (Jacobs, 1982).

Hal di atas telah menunjukkan tentang sifat dari teori-teori IPA yang kebenarannya bersifat nisbi, relatif, atau tentatif. Hal inilah yang menjadi kelemahan dari penalaran induktif. Artinya, suatu teori yang bernilai benar pada suatu saat, dapat saja bernilai salah pada pada tahun-tahun atau dekade-dekade berikutnya jika ditemukan suatu contoh sangkalan (*counter example*). Kata lainnya, pernyataan atau kesimpulan yang didapat dari penalaran induktif masih mungkin untuk bernilai salah. Karenanya, didalam matematika, kesimpulan yang didapat dari proses penalaran induktif masih disebut dengan dugaan (*conjecture*). Dugaan tersebut lalu akan dikukuhkan menjadi suatu teorema jika dugaan tersebut sudah dapat dibuktikan kebenarannya secara deduktif. Sekali lagi, suatu dugaan bisa bernilai benar namun juga bisa bernilai salah sehingga harus dibuktikan kebenarannya melalui penalaran deduktif ataupun ditunjukkan kesalahannya dengan menggunakan suatu contoh sangkalan (*counter example*). Dengan kata lain, kebenaran pengetahuan empirik adalah "Post-theory", sedangkan kebenaran Matematika adalah "apriori".

Kesimpulan akhirnya, pada satu sisi, dengan proses induksi atau penalaran induktif akan didapatkan suatu pernyataan baru yang bersifat umum (*general)* yang melebihi kasus-kasus khususnya (*knowledge expanding*); dan proses mendapatkan suatu pernyataan baru ini telah teridentifikasi sebagai suatu kelebihan dari induksi jika dibandingkan dengan deduksi, namun pada sisi lainnya, hasil yang didapat dari induksi tersebut masih berpeluang untuk menjadi salah. Pada deduksi yang valid atau sahih, kesimpulan yang

didapat dinyatakan tidak akan pernah salah jika premis-premisnya bernilai benar (*truth preserving*); dan hal ini telah teridentifikasi sebagai kelebihan dari deduksi jika dibandingkan dengan hasil proses induksi. Sampai saat ini, para filusuf sedang mengimpikan suatu bentuk argumen atau penalaran yang dapat menghasilkan pernyataan baru yang bersifat umum yang melebihi kasus-kasus khususnya (*knowledge expanding*); dan hasilnya tidak akan salah jika premis-premisnya bernilai benar (*truth preserving*); namun menurut Giere (1984: 45) impian para filusuf tersebut tidak akan terlaksana dan manusia dituntut untuk memilih salah satunya sesuai dengan kebutuhannya sebagaimana pernyataannya: "*The philosophers' dream of finding a form of argument that would be both truth preserving and knowledge expanding is an impossible dream. You must choose one or the other. You cannot both*". Pernyataan Giere ini telah menunjukkan bahwa kedua penalaran itu memiliki kelemahan dan kekuatannya sendiri-sendiri.

G. Implikasinya dalam Pembelajaran Matematika

Sekali lagi, penarikan kesimpulan pada induksi yang bersifat umum (*general)* ini akan menjadi sangat penting, karena ilmu pengetahuan tidak akan pernah berkembang tanpa adanya penarikan kesimpulan ataupun pembuatan pernyataan baru yang bersifat umum. Hal inilah yang telah menjadi suatu kelebihan dari penalaran induktif (induksi) dibandingkan dengan penalaran deduktif (deduksi). Dari beberapa kasus khusus seperti: $6 + 2 = 2 + 6$; $9 + (-2)= (-2) + 9$; serta beberapa kasus lainnya akan didapat suatu sifat umum pada penjumlahan yaitu $a + b = b + a$ yang dikenal dengan sifat komutatif. Pada aljabar (Vance, 19..: 22) sifat ini menjadi sifat yang tidak bisa dibuktikan karena tidak ada pijakan untuk melakukan hal itu. Pernyataan seperti itu lalu dianggap bernilai benar dan dikenal sebagai aksioma atau postulat. Dari aksioma atau postulat ini dapat dikembangkan bangunan matematika. Secara umum dapatlah disimpulkan bahwa:

1. Pada awalnya, proses matematisasi yang dilakukan dan dihasilkan para matematikawan adalah proses induksi atau penalaran induktif. Dimulai dari kasus-kasus khusus yang lalu digeneralisasi menjadi pernyataan umum (*general*).
2. Proses berikutnya adalah proses formalisasi pengetahuan matematika dengan terlebih dahulu menetapkan sifat pangkal (aksioma) dan pengertian pangkal, yang akan menjadi pondasi pengetahuan matematika berikutnya yang harus dibuktikan secara deduktif.

Berkait dengan penalaran induktif dan deduktif ini, pernyataan George Polya (1973: VII) berikut sudah seharusnya mendapat perhatian para pembaca, para guru matematika. Polya menyatakan bahwa: "*Yes, mathematics has two faces; it is the rigorous science of Euclid but it is also something else. Mathematics presented in the Euclidean way appears as a systematic, deductive science; but mathematics in the making appears as an experimental, inductive science".* Pendapat Polya ini telah menunjukkan pengakuan beliau tentang pentingnya penalaran induktif (*induksi*) dalam pengembangan matematika. Jika pada masa lalu, siswa memulai belajar matematika secara deduktif aksiomatis, hal ini sesungguhnya telah mengingkari proses bertumbuh dan berkembangnya matematika. Mengikut pada yang telah dilakukan para matematikawan, matematika yang dipelajari para siswa di sekolah sudah seharusnya mengikuti proses didapatkannya matematika tersebut. Karena itu, pada masa kini, dengan munculnya teori-

teori belajar seperti belajar bermakna dari Ausubel, teori belajar dari Piaget serta Vigotsky (kontruktivisme sosial), para siswa dituntun ataupun difasilitasi untuk belajar sehingga dapat menemukan kembali (*reinvent*) atau mengkonstruksi kembali (*reconstruct*) pengetahuannya yang dikenal dengan kontekstual learning, matematika humanistik, ataupun matematika realistik. Proses pembelajaran seperti ini, pada tahap-tahap awalnya akan lebih menggunakan penalaran induktif daripada deduktif seperti yang dinyatakan Polya tadi. Sejalan dengan teori pembelajaran terbaru seperti konstruktivisme dan munculnya pendekatan baru seperti RME (*Realistic Mathematics Education)*, PBL *(Problem Based Learning),* serta CTL *(Contextual Teaching & Learning)*, maka proses pembelajaran di kelas sudah seharusnya dimulai dari masalah nyata yang pernah dialami atau dapat dipikirkan para siswa, dilanjutkan dengan kegiatan bereksplorasi, lalu para siswa akan belajar matematika secara informal, dan diakhiri dengan belajar matematika secara formal. Mudah-mudahan dengan proses pembelajaran seperti ini, pada akhirnya akan muncul penemu-penemu besar dari negara tercinta kita, Indonesia.

Bahan Diskusi

Secara berkelompok, buatlah contoh-contoh pembelajaran yang mengarah ke penalaran induktif dan deduktif.

Bab III
Pemecahan Masalah Dalam Pembelajaran Matematika

A. Pengertian Masalah dan Pemecahan Masalah

Berikut ini adalah contoh soal Lomba MIPA (SLTP) Tingkat Nasional dan Olimpiade Matematika Indonesia (SMU) Tahun 2003.

Untuk menarik minat pelanggannya, manajer suatu restoran makanan cepat saji memberikan kupon berhadiah kepada setiap orang yang membeli makanan di restoran tersebut dengan nilai lebih dari Rp. 25.000,00.

Di balik setiap kupon tersebut, tertera salah satu dari bilangan-bilangan berikut: 9, 12, 42, 57, 69, 21, 15, 75, 24, atau 81.

Pembeli yang berhasil mengumpulkan beberapa kupon dengan jumlah bilangan-bilangan di balik kupon tersebut sama dengan 100 akan diberi hadiah TV 21 inch.

Kalau pemilik restoran tersebut menyediakan sebanyak 10 buah TV 21 inch, berapa banyak TV yang harus diserahkan kepada para pelanggannya?

Buktikan bahwa $a^9 - a$ habis dibagi 6, untuk setiap bilangan bulat a.

Cobalah untuk menyelesaikan dua soal di atas terlebih dahulu. Manakah dari kedua soal tersebut yang merupakan masalah? Mengapa soal tersebut Anda kategorikan sebagai masalah? Atau, mengapa soal tersebut Anda kategorikan sebagai soal biasa dan tidak dikategorikan sebagai masalah? Jika ada siswa SLTP ataupun SMU yang sudah pernah mendapat soal tersebut dan sudah tahu langkah-langkah pengerjaannya, apakah soal tersebut masih terkategori sebagai masalah bagi mereka? Berdasar pada jawaban terhadap pertanyaan di atas, sebagian besar ahli Pendidikan Matematika menyatakan bahwa masalah merupakan pertanyaan yang harus dijawab atau direspon. Namun mereka menyatakan juga bahwa tidak semua pertanyaan otomatis akan menjadi masalah. Suatu pertanyaan akan menjadi masalah hanya jika pertanyaan itu menunjukkan adanya suatu tantangan (*challenge)* yang tidak dapat dipecahkan oleh suatu prosedur rutin (*routine procedure)* yang sudah diketahui si pelaku, seperti yang dinyatakan Cooney, et al. (1975: 242) berikut: "... *for a question to be a problem, it must present a challenge that cannot be resolved by some routine procedure known to the student."*

Implikasi dari definisi di atas, termuatnya 'tantangan' serta 'belum diketahuinya prosedur rutin' pada suatu pertanyaan yang akan diberikan kepada para siswa akan menentukan terkategorikan tidaknya suatu pertanyaan menjadi '*masalah*' atau hanyalah suatu '*pertanyaan*' biasa. Karenanya, dapat terjadi bahwa suatu 'masalah' bagi seseorang siswa akan menjadi 'pertanyaan' bagi siswa lainnya karena ia sudah mengetahui prosedur untuk menyelesaikannya. Secara umum, menentukan nilai 12345×4 tidak dapat dikategorikan sebagai suatu masalah bagi siswa SMU maupun siswa SLTP karena mereka telah tahu prosedur penyelesaiannya. Namun dua soal di atas dapat dikategorikan sebagai masalah bagi sebagian besar siswa dan mungkin juga bagi para guru SMU karena mereka belum mengetahui prosedur atau langkah-langkah untuk menyelesaikannya.

B. Proses Pemecahan Masalah

Sebagaimana disampaikan di bagian depan, suatu pertanyaan akan menjadi masalah hanya jika pertanyaan itu menunjukkan adanya suatu tantangan (*challenge)* yang tidak dapat dipecahkan oleh suatu prosedur rutin (*routine procedure)* yang sudah diketahui si pelaku, maka untuk menyelesaikan suatu masalah diperlakukan waktu yang relatif lebih lama dari proses pemecahan soal rutin biasa. Sekali lagi, cobalah untuk menyelesaikan dua soal (atau masalah) di atas. Manakah dari kedua masalah tersebut yang lebih mudah dipecahkan? Untuk menyelesaikan masalah di atas, ada empat langkah penting yang harus dilakukan, yaitu:

1. Memahami Masalahnya

Pada langkah ini, para pemecah masalah (siswa) harus dapat menentukan dengan jeli apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan. Namun yang perlu diingat, kemampuan otak manusia sangatlah terbatas, sehingga hal-hal penting hendaknya dicatat, dibuat tabelnya, ataupun dibuat sket atau grafiknya. Tabel serta gambar ini dimaksudkan untuk mempermudah memahami masalahnya dan mempermudah mendapatkan gambaran umum penyelesaiannya. Dengan membuat gambar, diagram, atau tabel; hal-hal yang diketahui tidak hanya dibayangkan di dalam otak yang sangat terbatas kemampuannya, namun dapat dituangkan ke atas kertas. Namun untuk soal seperti di atas, tidaklah perlu dibuat gambar, diagram, atau tabelnya. Disamping mengetahui yang diketahui, para pemecah masalah ini dituntut untuk mengetahui yang ditanyakan, yang akan menjadi arah pemecahan masalahnya. Bukanlah hal yang bijak jika dalam proses pemecahan masalah, arah yang akan dituju tidak atau belum teridentifikasi secara jelas. Untuk soal pertama di atas akan didapat:

Diketahui: Sepuluh bilangan, yaitu: 9, 12, 15, 21, 24, 42, 57, 69, 75, dan 81.

Ditanya: Gabungan satu atau beberapa bilangan di atas yang jumlahnya 100.

Dengan format di atas, masalah yang terdiri atas beberapa baris kalimat dapat diubah menjadi dua baris kalimat yang menjadi inti atau saripatinya.

2. Merencanakan Cara Penyelesaian

Untuk memecahkan masalah di atas, apa yang harus dilakukan? Apakah akan melakukan dengan mencoba-coba? Namun bagaimana jika ada kombinasi biangan yang terlewati? Untuk menghindari hal tersebut, diperlukan adanya aturan-aturan yang dibuat sendiri oleh para pelaku selama proses pemecahan masalah berlangsung sehingga dapat dipastikan tidak akan ada satupun alternatif yang terabaikan. Untuk itu, setiap bilangan yang ada harus dikombinasikan dengan bilangan lainnya sehingga jumlahnya menjadi 100. Contohnya, jika seseorang mendapat bilangan dengan nilai 81, untuk menghasilkan nilai dengan jumlah 100, orang tersebut harus mendapat bilangan dengan nilai 19. Hasil tersebut dapat dimasukkan ke tabel seperti di bawah ini, sehingga menjadi lebih tertata rapi:

Bil 1	Bil 2	Bil 3	Ket
81	19	–	TM *)

*) TM = Tidak Mungkin

Dengan memperhatikan kesepuluh bilangan di atas, terutama tiga bilangan terkecil, yaitu: 9, 12, dan 15 yang kombinasinya tidak akan menghasilkan jumlah sebesar 19, maka dapat ditarik suatu kesimpulkan, bahwa jika seseorang mendapat bilangan dengan nilai 81 maka ia tidak akan mungkin mendapat nilai yang jumlahnya dengan bilangan lain akan menjadi 100. Contohnya 9 + 9 = 18, 9 + 12 = 21, dan 12 + 12 = 24. Berdasar hasil analisis ini, dapatlah disimpulkan bahwa nilai 81 jika ditambah dengan bilangan lain, tidak akan menghasilkan 100, sehingga nilai 81 dapat dikeluarkan dari daftar. Sebagai akibatnya, soalnya lalu menjadi:

> *Diketahui: Sembilan bilangan, yaitu: 9, 12, 15, 21, 24, 42, 57, 69, dan 75.*
>
> Ditanya: Gabungan satu atau

Begitu seterusnya proses seperti di atas dilakukan, dan hasilnya dimasukkan ke tabel di bawah ini.

3. Melaksanakan Rencana

Berdasar rencana di atas, dapat dilaksanakan pengisian tabel selanjutnya seperti berikut ini.

B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	Ket
75	25	Tidak ada gabungan bilangan tersisa yang jumlahnya 25								TM
69	31	Tidak ada gabungan bilangan tersisa yang jumlahnya 31								TM
57	43	Tidak ada gabungan bilangan tersisa yang jumlahnya 43								TM
42	42	8	Tidak ada gabungan bilangan tersisa yang jumlahnya 8							TM
42	58	Tidak ada gabungan bilangan tersisa yang jumlahnya 58								TM
21	21	21	21	16	Tidak ada gab bil tersisa yang jumlahnya 16					TM
21	21	21	37	Tidak ada gab bilangan tersisa yang jumlahnya 37						TM
21	21	58	Tidak ada gabungan bilangan tersisa yang jumlahnya 58							TM
21	79	Tidak ada gabungan bilangan tersisa yang jumlahnya 79								TM
6×15		10	Tidak ada gabungan bilangan tersisa yang jumlahnya 10							TM
5×15		25	Tidak ada gabungan bilangan tersisa yang jumlahnya 25							TM
4×15		40	Tidak ada gabungan bilangan tersisa yang jumlahnya 40							TM
3×15		55	Tidak ada gabungan bilangan tersisa yang jumlahnya 55							TM
2×15		70	Tidak ada gabungan bilangan tersisa yang jumlahnya 70							TM
15	85	Tidak ada gabungan bilangan tersisa yang jumlahnya 85								TM
8 × 12		4	Tidak ada gab bilangan tersisa yang jumlahnya 8							TM
7 × 12		16	Tidak ada gab bilangan tersisa yang jumlahnya 16							TM
6 × 12		28	Tidak ada gab bilangan tersisa yang jumlahnya 28							TM
5 × 12		40	Tidak ada gab bilangan tersisa yang jumlahnya 40							TM
4 × 12		52	Tidak ada gab bilangan tersisa yang jumlahnya 52							TM
3 × 12		64	Tidak ada gab bilangan tersisa yang jumlahnya 64							TM
2 × 12		76	Tidak ada gab bilangan tersisa yang jumlahnya 76							TM
12	88	Tidak ada gabungan bilangan tersisa yang jumlahnya 88								TM
9	91	Tidak ada gabungan bilangan tersisa yang jumlahnya 81								TM

Cara yang lebih cepat untuk menyelesaikan masalah ini adalah dengan memperhatikan bahwa 9, 12, 15, 21, …, 75 merupakan bilangan-bilangan yang habis dibagi 3. Jika $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m \in \{9, 12, 15, 21, \ldots, 75\}$ dengan u_i habis dibagi 3. Akibatnya, jika dimisalkan $100 = u_1 + u_2 + \ldots + u_k$ dengan $m \leq k$ maka 100 habis dibagi 3. Jelas ini tidak mungkin terjadi, sehingga tidak mungkin jumlah bilangan-bilangan tersebut = 100.

4. Menafsirkan Hasilnya

Dari tabel di atas, dapat disimpulkan bahwa tidak mungkin ada gabungan satu atau beberapa nilai berikut: 9, 12, 15, 21, 24, 42, 57, 69, 75, dan 81; yang akan menghasilkan nilai 100. Jadi, pengusaha makanan cepat saji tersebut tidak akan mungkin memberikan TV kepada pelanggannya.

C. Beberapa Strategi Pemecahan Masalah

Pada saat memecahkan masalah pembelajaran di kelas, ada beberapa cara atau langkah yang sering digunakan Bapak atau Ibu Guru dalam membantu siswanya. Ketika ada siswa yang salah dengan menyatakan $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$, Bapak dan Ibu Guru sering meminta para siswanya untuk menentukan hasil $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ untuk menunjukkan bahwa hasil yang dikerjakan siswa itu tadi salah. Cara yang dilakukan bapak atau ibu guru tadi adalah mengubah suatu bentuk yang sulit diterima atau diselesaikan siswa menjadi suatu bentuk yang lebih sederhana yang diperkirakan dapat diselesaikan siswa yang salah tadi, sehingga si siswa diharapkan dapat memperbaiki perhitungannya yang salah tadi. Cara yang sering digunakan orang dan sering berhasil pada proses pemecahan masalah inilah yang disebut dengan strategi pemecahan masalah. Pada contoh tadi, strategi itu dikenal dengan strategi mencobakan pada soal yang lebih sederhana. Disamping itu, ada beberapa strategi lainnya yang sudah dikenal dan dikemukakan para ahli pendidikan matematika. Beberapa strategi yang sering digunakan menurut Polya (1973) dan Pasmep (1989) di antaranya dapat dilihat di bawah ini.

1. Mencoba-coba.
   Strategi ini biasanya digunakan untuk mendapatkan gambaran umum pemecahan masalahnya dengan mencoba-coba (*trial and error*). Proses mencoba-coba ini tidak akan selalu berhasil. Adakalanya gagal. Karenanya, proses mencoba-coba dengan menngunakan suatu analisis yang tajamlah yang sangat dibutuhkan pada penggunaan strategi ini.

2. Membuat diagram
   Strategi ini berkait dengan pembuatan sket atau gambar untuk mempermudah memahami masalahnya dan mempermudah mendapatkan gambaran umum penyelesaiannya. Dengan strategi ini, hal-hal yang diketahui tidak hanya dibayangkan di dalam otak saja namun dapat dituangkan ke atas kertas.

3. Mencobakan pada soal yang lebih sederhana
   Strategi ini berkait dengan penggunaan contoh-contoh khusus yang lebih mudah dan lebih sederhana, sehingga gambaran umum penyelesaian masalahnya akan lebih mudah dianalisis dan akan lebih mudah ditemukan.

4. Membuat tabel
   Strategi ini digunakan untuk membantu menganalisis permasalahan atau jalan pikiran kita, sehingga segala sesuatunya tidak hanya dibayangkan oleh otak yang kemampuannya sangat terbatas.

5. Menemukan pola
   Strategi ini berkait dengan pencarian keteraturan-keteraturan. Dengan keteraturan yang sudah didapatkan tersebut akan lebih memudahkan kita untuk menemukan penyelesaian masalahnya.

6. Memecah tujuan
   Strategi ini berkait dengan pemecahan tujuan umum yang hendak kita capai menjadi satu atau beberapa tujuan bagian. Tujuan bagian ini dapat digunakan sebagai batu loncatan untuk mencapai tujuan yang sesungguhnya.

7. Memperhitungkan setiap kemungkinan
   Strategi ini berkait dengan penggunaan aturan-aturan yang dibuat sendiri oleh para pelaku selama proses pemecahan masalah berlangsung sehingga dapat dipastikan tidak akan ada satupun alternatif yang terabaikan.

8. Berpikir logis
   Strategi ini berkaitan dengan penggunaan penalaran ataupun penarikan kesimpulan yang sah atau valid dari berbagai informasi atau data yang ada.

9. Bergerak dari belakang
   Dengan strategi ini, kita mulai dengan menganalisis bagaimana cara mendapatkan tujuan yang hendak dicapai. Dengan strategi ini, kita memulai proses pemecahan masalahnya dari yang diinginkan atau yang ditanyakan lalu menyesuaikannya dengan yang diketahui.

10. Mengabaikan hal yang tidak mungkin
    Dari berbagai alternatif yang ada, alternatif yang sudah jelas-jelas tidak mungkin agar dicoret/diabaikan sehingga perhatian dapat tercurah sepenuhnya untuk hal-hal yang tersisa dan masih mungkin saja.

Mempelajari strategi pemecahan masalah ini bagi para siswa lalu menjadi sangat penting karena dapat digunakan atau dimanfaatkan para siswa ketika mereka terjun langsung di masyarakat, maupun ketika mereka mempelajari mata pelajaran lainnya.

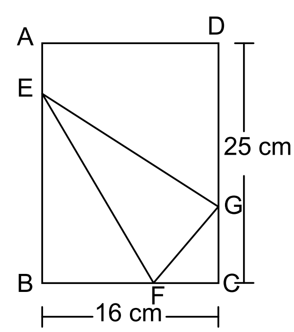
D. Beberapa Contoh Masalah untuk Guru dan Siswa SLTP

Beberapa contoh masalah untuk para siswa dan guru SLTP berikut merupakan soal Lomba Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Tingkat Nasional Tahun 2003. Soal nomer 1 – 8 diujikan pada hari pertama dan soal nomer 9 – 12 diujikan pada hari kedua. Waktu yang disediakan untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan pada hari pertama dan hari kedua adalah sama yaitu 180 menit. Cobalah untuk menyelesaikan masalah-masalah ini sebelum melanjutkan membaca paket ini. Ada berapa soal yang dapat diselesaikan siswa terbaik Bapak atau Ibu Guru dan berapa soal yang dapat diselesaikan Bapak atau Ibu Guru sendiri?

1. Pola ABBCCCDDDDABBCCCDDDDABBCCCDDDD … berulang sampai tak terhingga. Huruf apakah yang menempati urutan ke $2^5 3^3$?

2. Buktikan bahwa jika $a > 2$ dan $b > 3$, maka:
   $ab + 6 > 3a + 2b$.

3. Diberikan persegipanjang ABCD dengan ukuran 16 cm × 25 cm seperti gambar di samping kanan ini. EBFG berbentuk layang-layang, dan panjang AE = 5 cm. Tentukan panjang EF.



4. Perhatikan kumpulan pernyataan berurut berikut.

Diketahui bahwa $x = 1$
Karena $x = 1$, maka $x^2 = 1$, sehingga $x^2 = x$
Akibatnya,
$x^2 - 1 = x - 1$ atau $(x - 1)(x + 1) = (x - 1) . 1$
Dengan aturan pencoretan, diperoleh
$x + 1 = 1$, $1 + 1 = 1$, atau $2 = 1$

Pertanyaannya:

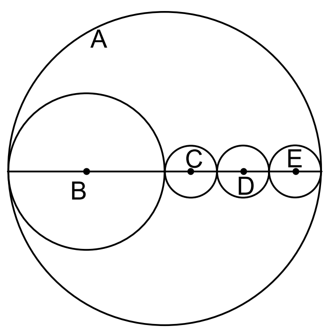
a. Kalau 2 = 1, maka setiap bilangan asli pasti sama dengan 1. Tunjukkan.

b. Hasil 2 = 1 adalah sesuatu yang tidak mungkin. Tentu ada yang salah di dalam argumen di atas? Dimanakah letak kesalahannya? Mengapa itu kamu anggap salah?

5. Untuk menghitung $\sqrt{(1998)(1996)(1994)(1992)+16}$, seseorang melakukannya dengan cara sederhana sebagai berikut: $2000^2 - 2 \times 5 \times 2000 + 5^2 - 5$? Apakah cara yang dilakukan orang itu dapat dibenarkan? Mengapa?

6. Untuk menarik minat pelanggan, suatu restoran penjual makanan cepat saji memberikan kupon berhadiah kepada setiap orang yang membeli makanan di restoran tersebut dengan nilai lebih dari Rp 25.000,00. Di balik setiap kupon tersebut, tertera salah satu dari bilangan-bilangan berikut: 9, 12, 42, 57, 69, 21, 15, 75, 24 dan 81. Pembeli yang berhasil mengumpulkan kupon dengan jumlah bilangan di balik kupon tersebut sama dengan 100 akan diberi hadiah berupa TV 21″. Kalau pemilik restoran tersebut menyediakan sebanyak 10 buah TV 21″, berapa banyak yang harus diserahkan kepada para pelanggannya?

7. Diketahui bentuk gambar di bawah berikut ini.

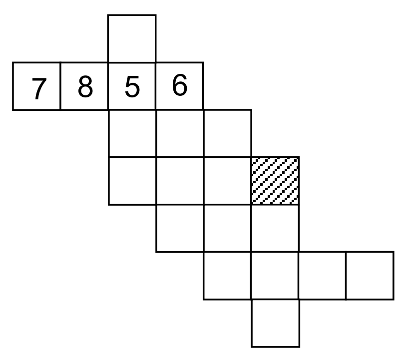


Titik-titik pusat lingkaran B, C, D, dan E diletakkan pada garis tengah lingkaran A. Garis tengah lingkaran B sama dengan jari-jari lingkaran A. Lingkaran C, D, dan E sama besar dan sepasang-sepasang bersinggungan di luar sehingga garis tengah ketiga lingkaran tersebut juga sama dengan jari-jari lingkaran A. Bagaimanakah perbandingan keliling lingkaran A dengan jumlah keliling lingkaran B, C, D, dan E?

8. Diketahui $a + b + c = 0$. Tunjukkan bahwa $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

9. Diketahui $a_1 = 2$, $a_2 = 3$. Untuk $k > 2$ didefinisikan bahwa $a_k = \frac{1}{2} a_{k-2} + \frac{1}{3} a_{k-1}$. Tentukan jumlah tak hingga dari $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$.

10. Bilangan *terkali* adalah bilangan asli dalam bentuk dua digit diikuti oleh hasil kalinya. Sebagai contoh, $7 \times 8 = 56$, maka 7856 dan 8756 adalah bilangan terkali. Karena $2 \times 3 = 6$, maka 236 dan 326 adalah bilangan terkali. Karena $2 \times 0 = 0$, maka 200 adalah bilangan terkali. Sebagai catatan, digit pertama bilangan terkali tidak boleh 0.

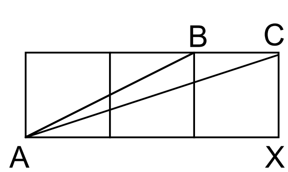


a. Berapakah selisih antara bilangan terkali terbesar dan bilangan terkali terkecil?

b. Cari semua bilangan terkali terdiri dari tiga digit yang masing-masing digitnya merupakan bilangan kuadrat.

c. Diberikan "kotak-kotak" di kanan atas yang harus diisi dengan bilangan terkali. Tentukan isi kotak yang diarsir. Apakah isi ini merupakan satu-satunya?

d. Lengkapi semua kotak kosong di atas dengan bilangan terkali.

11. 

susunan tiga persegi di samping kiri ini. Buktikan bahwa $\angle BAX + \angle CAX = 45^{o}$

12. Buktikan bahwa $(n - 1)\, n\, (n^3 + 1)$ senantiasa habis dibagi oleh 6 untuk semua bilangan asli $n > 1$.

Sekali lagi, cobalah Anda selesaikan masalah-masalah di atas untuk menguji kemampuan memecahkan masalah Anda. Akan diperlukan kesabaran, keuletan, kreativitas, dan pengetahuan matematika yang prima untuk memecahkan masalah-masalah tadi. Tidak seperti ketika menyelesaikan soal rutin yang sudah dipelajari langkah-langkahnya, sebagian dari soal-soal di atas, kemungkinan besar belum Anda pelajari langkah-langkahnya, dan menurut definisi akan terkategori sebagai masalah. Namun sebagian soal yang telah Anda pelajari dan sudah tahu langkah-langkahnya tidak lagi terkategori sebagai masalah, namun sudah menjadi soal biasa. Gunakan satu atau beberapa strategi yang cocok dengan masalahnya.

E. Implikasinya pada Pembelajaran Matematika

Setelah mencoba menyelesaikan masalah atau soal di atas, keterampilan apa saja yang Anda dapatkan? Berkait dengan pentingnya pemecahan masalah ini, terutama selama proses pembelajaran sedang berlangsung, W.W. Sawyer pernah menulis di dalam bukunya *Mathematician's Delight*, sebagaimana dikutip Jacobs (1982:12) suatu pernyataan berikut: "*Everyone knows that it is easy to do a puzzle if someone has told you the answer. That is simply a test of memory. You can claim to be a mathematician only if you can solve puzzles that you have never studied before. That is the test of reasoning.*" Pernyataan W.W. Sawyer ini telah menunjukkan bahwa pengetahuan yang diberikan atau ditransformasikan langsung kepada para siswa akan kurang meningkatkan kemampuan bernalar (*reasoning)* mereka. W.W. Sawyer menyebutnya hanya meningkatkan kemampuan untuk mengingat saja. Padahal di era global dan era perdagangan bebas, kemampuan bernalarlah serta kemampuan berpikir tingkat tinggi yang akan sangat menentukan keberhasilan mereka. Karenanya, pemecahan masalah akan menjadi hal yang akan sangat menentukan juga keberhasilan pendidikan matematika, sehingga pengintegrasian pemecahan masalah (*problem solving*) selama proses pembelajaran berlangsung hendaknya menjadi suatu keharusan.

Keterampilan serta kemampuan berpikir yang didapat ketika seseorang memecahkan masalah diyakini dapat ditransfer atau digunakan orang tersebut ketika menghadapi masalah di dalam kehidupan sehari-hari. Karena setiap orang, siapapun orang tersebut akan selalu dihadapkan dengan masalah; maka pembelajaran pemecahan masalah atau belajar memecahkan masalah dijelaskan Cooney et al. (1975: 242) sebagai berikut: "… *the action by which a teacher encourages students to accept a challenging question and guides them in their resolution.*" Hal ini menunjukkan bahwa pembelajaran pemecahan masalah adalah suatu tindakan (*action*) yang dilakukan guru agar para siswanya termotivasi untuk menerima tantangan yang ada pada pertanyaan (soal) dan mengarahkan para siswa dalam proses pemecahannya.

Hal yang telah dipaparkan di atas telah menunjukkan pentingnya tantangan serta konteks yang ada pada suatu masalah sebagai motivasi bagi para siswa. Para siswa akan berusaha dengan sekuat tenaga untuk memecahkan suatu masalah yang diberikan gurunya jika mereka menerima tantangan yang ada pada masalah tersebut. Sangatlah penting untuk memformulasikan kalimat pada masalah yang akan disajikan kepada para siswa dengan cara yang menarik, berkait dengan kehidupan nyata mereka sehingga tidak terlalu abstrak, dan dapat dipecahkan para siswa, baik dengan bantuan ataupun tanpa bantuan gurunya. Pemberian masalah yang tidak pernah dapat diselesaikan siswa dapat menurunkan motivasi mereka.

Dikenal dua macam masalah, yaitu soal ceritera (*textbook word problem*) dan masalah prosess (*process problem*). Pada masa-masa yang lalu, 'masalah' diberikan setelah teorinya didapatkan para siswa, sehingga para siswa hanya belajar untuk mengaplikasikan pengetahuan matematika yang didapat namun tidak pernah atau sedikit sekali mendapat kesempatan untuk belajar memecahkan masalah yang terkategori sebagai 'masalah proses'. Padahalnya, para siswa harus diberi kesempatan untuk mempelajari peoses pemecahan masaalah yang terkategori sebagai 'masalah proses'. Untuk mengatasi hal ini, sesuai dengan pendekatan pembelajaran matematika yang baru, masalah diberikan di awal kegiatan sebagai tantangan bagi para siswa. Dengan masalah ini, para siswa diberi kesempatan untuk bereksplorasi atau menyelidiki, tentunya dengan pertanyaan-pertanyaan dari guru ataupun pertanyaan-pertanyaan yang muncul dari para siswa sendiri dalam bentuk *problem-posing*, sehingga teorema, rumus, dalil, pengertian, maupun konsep baru dapat dimunculkan dari masalah yang dikemukakan pada awal kegiatan ini. Dengan cara seperti ini, para siswa kita tidak hanya diberikan teori-teori dan rumus-rumus matematika yang sudah jadi, akan tetapi para siswa dilatih dan dibiasakan untuk belajar memecahkan masalah selama proses pembelajaran di kelas sedang berlangsung sedemikian sehingga pemahaman suatu konsep atau pengetahuan haruslah dibangun sendiri (dikonstruksi) oleh siswa (pembelajar). Dokumen Kurikulum Berbasis Kompetensi (KBK) dengan judul pendekatan pembelajaran dan penilaian (Depdiknas, 2002: 14) telah dinyatakan bahwa: "… *suatu rumus, konsep, atau prinsip dalam matematika, seyogyanya ditemukan kembali oleh si pembelajar dibawah bimbingan guru (guided reinvention), kecuali untuk pengetahuan yang bersifat faktual dan prosedural, yang cukup dikenalkan dan diingat siswa misalnya: lambang bilangan dan notasi, prosedur mengalikan atau membagi."*

Sekali lagi, inti dari belajar memecahkan masalah adalah para siswa hendaknya terbiasa mengerjakan soal-soal yang tidak hanya memerlukan ingatan yang baik saja. Terutama di era global dan era perdagangan bebas, kemampuan berpikir kritis, kreatif, logis, dan rasionallah yang semakin dibutuhkan. Karenanya, disamping diberi masalah-masalah yang menantang, selama di kelas, seorang guru matematika dapat saja memulai proses pembelajarannya dengan mengajukan 'masalah' yang cukup menantang dan menarik bagi para siswa. Siswa dan guru lalu bersama-sama memecahkan masalahnya tadi sambil membahas teori-teori, definisi maupun rumus-rumus matematikanya.

Proses pembelajaran di kelas yang mengkondisikan siswa untuk belajar memecahkan dan menemukan kembali ini akan membuat para siswa terbiasa melakukan penyelidikan dan menemukan sesuatu. Kegiatan belajarnya biasanya dimulai dengan penayangan masalah nyata yang pernah dialami atau dapat dipikirkan para siswa, dilanjutkan dengan kegiatan bereksplorasi dengan benda konkret, lalu para siswa akan mempelajari ide-ide matematika secara informal, belajar matematika secara formal dan diakhiri dengan kegiatan pelatihan. Dengan kegiatan seperti ini, diharapkan para siswa akan dapat memahami konsep, rumus, prinsip, dan teori-teori matematika sambil belajar memecahkan masalah. Intinya, penulis sangat mendukung isi dari dokumen KBK bahwa suatu rumus, konsep, atau prinsip dalam matematika, seyogyanya ditemukan kembali oleh si pembelajar di bawah bimbingan guru (*guided reinvention*).

Bahan Diskusi

Dalam kelompok, susunlah masalah yang dapat digunakan pada:

a. Awal kegiatan proses pembelajaran sehingga ide-ide matematika dapat dimunculkan dari masalah tersebut
b. Setelah selesai proses pembelajaran sebagai soal pengayaan bagi siswa yang cepat

Bab IV
Komunikasi Dalam Pembelajaran Matematika

F. Contoh Komunikasi dalam Matematika

Bab II paket ini telah membahas tentang penalaran yang merupakan suatu aktivitas berpikir untuk menarik kesimpulan baru berdasar pada beberapa pernyataan yang diketahui benar ataupun yang dianggap benar, sedangkan Bab III telah membahas tentang pemecahan masalah, yaitu suatu proses diterimanya tantangan (*challenge)* yang ada serta usaha untuk menemukan jawabannya. Kedua aktivitas berpikir tadi harus dikomunikasikan secara lisan ataupun tertulis sehingga dapat diketahui orang lain. Sebagai contoh, perhatikan salah satu soal Lomba MIPA (SLTP) Tingkat Nasional Tahun 2003 berikut. Berhentilah membaca, coba Anda selesaikan soal ini, lalu komunikasikan hasilnya.

Buktikan bahwa $(n - 1)\, n\, (n^3 + 1)$ senantiasa habis dibagi oleh 6 untuk semua bilangan asli $n > 1$.

Sekali lagi, cobalah untuk membuktikan kebenaran rumus atau pernyataan di atas sebelum melanjutkan membaca naskah ini.

1. Pembuktian Secara Induktif

Untuk membuktikan soal di atas, sebagian siswa lalu menggunakan penalaran induktif atau induksi seperti berikut:
Untuk $n = 2$, maka $(n - 1)\, n\, (n^3 + 1) = 1 \times 2 \times 9 = 18$ yang habis dibagi 6.
Untuk $n = 3$, maka $(n - 1)\, n\, (n^3 + 1) = 2 \times 3 \times 28 = 168$ yang habis dibagi 6.
Untuk $n = 4$, maka $(n - 1)\, n\, (n^3 + 1) = 3 \times 4 \times 65 = 780$ yang habis dibagi 6.
Deangan contoh-contoh lain, mereka lalu menyimpulkan bahwa
$(n - 1)\, n\, (n^3 + 1)$ habis dibagi 6.

Pertanyaan yang dapat diajukan adalah apakah hal seperti itu berlaku juga untuk n = 10.000.000.000.003 maupun 10.000.222.222.222.000.000.003? Yakinkah Anda bahwa dengan tiga atau seribu contoh sudah cukup untuk menggeneralisasikan bahwa bentuk aljabar $(n - 1)\, n\, (n^3 + 1)$ akan habis dibagi 6 untuk $n > 1$? Sekali lagi, pada matematika, jika para siswa tidak mampu membuktikan suatu teorema, dalil, atau rumus secara deduktif ataupun tidak mampu menunjukkan kesalahan rumus tersebut melalui suatu contoh sangkalan, maka hasil tersebut disebut dengan dugaan dan belum terkategori sebagai teorema. Pada intinya, pembuktian dengan penalaran induktif seperti di atas belum dapat meyakinkan para pembaca bahwa rumus atau pernyataan tersebut akan benar untuk seluruh nilai $n > 1$. Untuk itu, alternatif pembuktian secara deduktif akan dikomunikasikan seperti di bawah ini.

2. Pembuktian Secara Deduktif

Bentuk $(n - 1)\, n\, (n^3 + 1)$ adalah sama dengan $(n - 1)\, n\, (n + 1)(n^2 - n + 1)$, karena $(n^3 + 1)$ sama dengan $(n + 1)(n^2 - n + 1)$. Bentuk $(n - 1)$; n; $(n + 1)$; maupun $(n^2 - n + 1)$ merupakan bilangan asli, sehingga bentuk aljabar $(n - 1)\, (n)\, (n^3 + 1) = (n - 1)\, (n)\, (n + 1)(n^2 - n + 1)$ akan habis dibagi 6 jika dapat dibuktikan bahwa $(n - 1)(n)(n^3 + 1) = (n - 1)(n)(n + 1)(n^2 - n + 1)$ habis dibagi 2 dan sekaligus juga habis dibagi 3.

Bentuk $(n - 1)(n)(n + 1)$ merupakan tiga bilangan asli berurutan, seperti $3 \times 4 \times 5$ ataupun $4 \times 5 \times 6$, sehingga minimal akan didapat salah satu di antara bilangan tersebut merupakan bilangan genap (habis dibagi 2). Secara deduktif dapat dinyatakan bahwa akan ada dua kemungkinan nilai n, yaitu:

a. n bernilai genap, sehingga bentuk $(n - 1)(n)(n + 1)$ akan bernilai genap atau akan habis dibagi 2.
b. n bernilai ganjil yang akan mengakibatkan $(n - 1)$ serta $(n + 1)$ bernilai genap sehingga bentuk $(n - 1)(n)(n + 1)$ akan bernilai genap juga.
   Dengan demikian, bahwa bentuk $(n - 1)(n)(n + 1)$ maupun $(n - 1)(n)(n^3 + 1) = (n - 1)(n)(n + 1)(n^2 - n + 1)$ akan habis dibagi 2 untuk setiap nilai $n > 1$ dan $n \in A$.
   Di samping itu, akan ada tiga kemungkinan tentang sisa suatu bilangan asli n jika dibagi 3, yaitu:
c. n habis dibagi 3 atau n akan bersisa 0 jika dibagi 3, yang akan mengakibatkan bentuk $(n - 1)(n)(n + 1)$ juga akan habis dibagi 3.
d. n akan bersisa 1 jika dibagi 3, yang akan mengakibatkan bentuk $(n - 1)$ akan habis dibagi 3. Sebagai contoh, jika n bernilai 4, 7, 10, 13, 16, … yang akan bersisa 1 jika dibagi 3, namun nilai pada bentuk $(n - 1)$-nya yaitu 3, 6, 9, 12, 15, … akan habis dibagi 3; yang pada akhirnya akan mengakibatkan bentuk $(n - 1)(n)(n + 1)$ habis dibagi 3 juga.
e. n akan bersisa 2 jika dibagi 3, yang akan mengakibatkan bentuk $(n + 1)$ habis dibagi 3. Sebagai contoh, jika n bernilai 5, 8, 11, 14, 17, … yang akan bersisa 2 jika dibagi 3, namun nilai pada bentuk $(n + 1)$-nya yaitu 6, 9, 12, 15, 18, … akan habis dibagi 3; yang pada akhirnya akan mengakibatkan bentuk $(n - 1)(n)(n + 1)$ habis dibagi 3 juga.
   Dengan demikian terbukti bahwa $(n - 1)(n)(n + 1)$ maupun $(n - 1)(n)(n^3 + 1) = (n - 1)(n)(n + 1)(n^2 - n + 1)$ akan habis dibagi 3 untuk setiap nilai $n > 1$ dan $n \in A$. Karena $(n - 1)(n)(n + 1)$ maupun $(n - 1)(n)(n^3 + 1) = (n - 1)(n)(n + 1)(n^2 - n + 1)$ terbukti merupakan bilangan genap (habis dibagi 2) dan juga habis dibagi 3, maka dapat disimpulkan bahwa $(n - 1)(n)(n^3 + 1) = (n - 1)(n)(n + 1)(n^2 - n + 1)$ akan habis dibagi 6.

Contoh di atas menunjukkan pentingnya kemampuan berkomunikasi dikembangkan dan dilatihkan kepada para siswa selama mereka duduk di kelas, sedemikian sehingga dengan belajar berkomunikasi, kemampuan bernalar dan kemampuan memecahkan masalah para siswa akan meningkat pula.

G. Peran Matematika Sebagai Alat Komunikasi

Pembuktian secara tertulis tadi telah menunjukkan bahwa, kata-kata, lambang matematis, dan bilangan telah digunakan untuk mengkomunikasikan ide-ide dan pikiran penulis. Di bawah judul '*Why teach mathematics*'; laporan Cockroft (1986: 1) menyatakan bahwa: "*We believe that all these perceptions of the usefulness of mathematics arise from the fact that mathematics provides a means of communication which is powerful, concise, and unambiguous.*" Pernyataan ini menunjukkan tentang perlunya para siswa belajar matematika dengan alasan bahwa matematika merupakan alat komunikasi yang sangat kuat, teliti, dan tidak membingungkan. Sebagai contoh, masih menurut laporan Cockroft, notasi 20×3 dapat digunakan untuk menyatakan berbagai hal, seperti:
1. Jarak tempuh sepeda motor selama 3 jam dengan kecepatan 20 km/jam.
2. Luas permukaan kolam dengan ukuran panjang 20 m dan lebar 3 meter.
3. Banyak roda pada 20 buah becak.

Contoh di atas telah menunjukkan bahwa suatu notasi, yaitu 20×3 dapat menyatakan suatu hal yang berbeda. Selain itu, lambang, gambar, dan tabel dapat juga digunakan untuk menyampaikan informasi. Bayangkan jika para siswa tidak mempelajari matematika, bagaimana cara mereka untuk menyatakan jarak yang ditempuh sepeda motor selama waktu dan dengan kecepatan tertentu? Bagaimana cara mereka untuk menentukan luas permukaan kolam dengan ukuran tertentu? Bagaimana cara mereka untuk menyatakan banyaknya roda becak, sepeda motor, mobil dalam jumlah tertentu?

Sejalan dengan itu, Suriasumantri (1988: 190) menulis: "Matematika adalah bahasa yang melambangkan serangkaian makna dari pernyataan yang ingin kita sampaikan. Lambang lambang matematika bersifat "artifisial" yang baru mempunyai arti setelah sebuah makna diberikan padanya." Sebagai contoh, jika n pada pembuktian di atas melambangkan suatu bilangan asli $n > 1$, maka n hanya melambangkan bilangan asli tertentu tersebut dan tidak bersifat ganda, Artinya, pada pembuktian di atas, n hanya melambangkan anggota-anggota himpunan semestanya, yaitu anggota-anggota himpunan bilangan asli yang lebih dari 1 yaitu: 2, 3, 4, 5, 6, … ; dan n tidak melambangkan 0,6 ataupun $\sqrt{3}$. Dengan demikian, lambang-lambang yang digunakan harus ditafsirkan sesuai dengan ketentuan yang sudah ditetapkan atau diperjanjikan dan tidak bisa ditafsirkan lain, kecuali lambang n tersebut akan digunakan untuk pembuktian rumus lain. Lambang n di atas dapat saja diganti dengan lambang lainnya, seperti x atau y, namun harus ditetapkan lebih dahulu pada awal pembuktian. Karenanya, lambang seperti 20×3 ataupun $m \times n$ dapat dipakai untuk melambangkan hal-hal yang berbeda. Namun begitu ditetapkan dan diperjanjikan, lambang tersebut hanya dapat digunakan untuk hal tersebut saja dan tidak dapat digunakan untuk melambangkan hal-hal lain.

Berdasar penjelasan di atas, KBK (Depdiknas, 2002: 6) menyatakan: "Banyak persoalan ataupun informasi disampaikan dengan bahasa matematika, misalnya menyajikan persoalan atau masalah ke dalam model matematika yang dapat berupa diagram, persamaan matematika, grafik, ataupun tabel. Mengkomunikasikan gagasan dengan bahasa matematika justru lebih praktis, sistematis, dan efisien. Begitu pentingnya matematika sehingga bahasa matematika merupakan bagian dari bahasa yang digunakan dalam masyarakat." Hal ini sesungguhnya telah membenarkan laporan Cockroft pada awal bagian ini yang menyatakan bahwa siswa harus belajar matematika dengan alasan bahwa matematika merupakan alat komunikasi yang sangat kuat dan berpengaruh (*powerful*), teliti dan tepat (*concise*), dan tidak membingungkan (*unambiguous*).

H. Implikasinya Pada Pembelajaran Matematika

Kemampuan mengkomunikasikan ide, pikiran, ataupun pendapat sangatlah penting. Seseorang tidak akan pernah mendapat gelar master atau doktor, serta profesor sebelum ia mampu mengkomunikasikan ide dan pendapatnya secara runtut dan sistematis dalam bentuk tesis ataupun disertasi. Di Australia, seorang sopir bus diharuskan menulis laporan di buku khusus tentang hal-hal yang penting yang ditemuinya selama di perjalanan, seperti perubahan temperatur mesin mobilnya yang tiba-tiba meningkat tajam ataupun peristiwa seorang penumpang yang sakit. Secara umum, sejalan dengan semakin kuatnya tuntutan keterbukaan dan akuntabilitas dari setiap lembaga, kemampuan mengkomunikasikan ide dan pendapat akan semakin dibutuhkan.

Untuk mengantisipasi keadaan seperti dipaparkan tadi, *Principles and Standarts for School Mathematics*, (NCTM 2000: 60) mendeklarasikan pernyatakan bahwa program pembelajaran di kelas-kelas TK sampai SMU di Amerika Serikat harus memberi kesempatan kepada para siswa untuk:

1. mengorganisasi dan mengkonsolidasikan pemikiran dan ide matematika dengan cara mengkomunikasikannya.
2. mengkomunikasikan pemikiran matematika mereka secara logis dan jelas kepada teman sejawatnya, gurunya, dan orang lain.
3. menganalisis dan mengevaluasi pemikiran matematika orang lain.

4. menggunakan bahasa matematika untuk menyatakan ide-ide mereka dengan tepat.

Berkait dengan aktivitas komunikasi dalam pembelajaran matematika, KBK (Depdiknas, 2002: 9) menyatakan bahwa salah satu kompetensi yang diharapkan dapat tercapai dalam belajar matematika yang berkait dengan keterampilan (kemahiran) matematika adalah kompetensi mengkomunikasikan gagasan dengan simbol, tabel, grafik, atau diagram untuk memperjelas keadaan atau masalah serta pemecahannya. Karena KBK (Depdiknas, 2002: 11) juga menyatakan bahwa kemampuan matematika yang dipilih serta ditetapkan sudah dirancang sesuai dengan kemampuan dan kebutuhan siswa agar dapat berkembang secara optimal, maka kompetensi yang berkait dengan komunikasi ini harus dicapai selama proses pembelajaran sedang berlangsung di kelas. Sekali lagi, kegiatan mengkomunikasikan hasil dan proses belajar dan menemukan ide-ide matematika ini akan menjadi sangat penting karena akan tetap digunakan para siswa baik ketika mereka masih duduk di bangku sekolah dan universitas, ataupun ketika mereka sudah meninggalkan bangku sekolah untuk bekerja. Pertanyaan yang kemungkinan besar dapat diajukan guru berkait dengan kompetensi berkomunikasi ini akan berkait dengan contoh-contoh aktivitas komunikasi selama proses pembelajaran matematika di kelas.

I. Beberapa Contoh Kegiatan Komunikasi Di Kelas

Berikut ini adalah tiga contoh kegiatan yang terindefikasi berkait dengan peningkatan kompetensi berkomunikasi di kelas di antaranya adalah:

1. Catatan Harian Pembelajaran Matematika

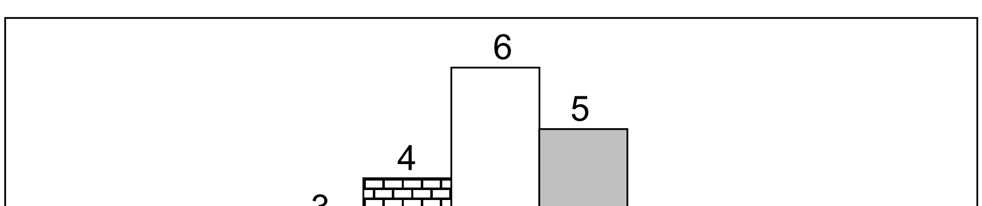
Contohnya adalah catatan harian siswa berikut (McIntosh & Draper 2001: 554) dimana siswa diminta untuk melaporkan tentang hubungan antara topik lama dan topik baru sebagai aktifitas catatan harian siswa.:

> *Topik-topik matematika yang sedang dipelajari saat ini merupakan kelanjutan dari topik-topik yang dipelajari sebelumnya. Penjelasannya adalah sebagai berikut:*
>
> ….
> ….

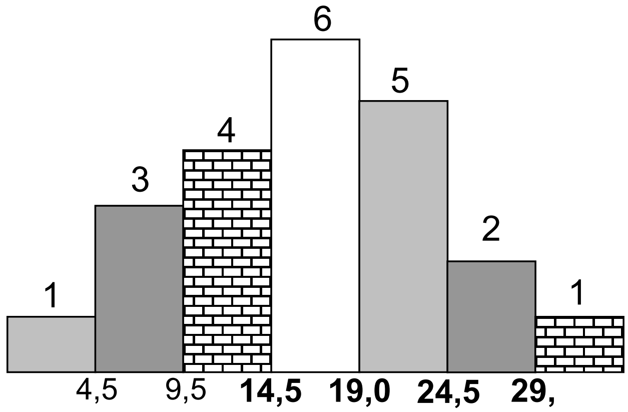
Contoh lainnya adalah tugas untuk catatan harian siswa (McIntosh & Draper 2001: 556) di mana siswa diminta untuk melaporkan secara terinci langkah-langkah untuk menentukan penyelesaian materi matematika, seperti di bawah ini.

6x + 2y = 16 4y + 8x +13 = –8 + 2x	*Pada bagian bawah kotak ini, jelaskan secara terici langkah-langkah untuk menentukan penyelesaian dari sistem persamaan dengan dua variabel di samping kanan ini.*
....	

2. Lap



2. Laporan Pemecahan Masalah ataupun Investigasi



Perhatikan Histogram di atas. Pada bagian bawah kotak ini, jelaskan secara terinci langkah-langkah Anda untuk membuat garis vertikal yang dapat membagi data di atas menjadi dua bagian yang sama

---

Sebelum para siswa mempelajari rumus median, siswa diminta untuk menyelesaikan tugas di atas. Dari tugas inilah, konsep matematika tentang rumus median dapat diturunkan dan ditemukan sendiri para siswa.

3. Laporan Kesalahan

Kesalahan yang dilakukan seorang siswa dapat digunakan sebagai bagian dari porses menyadarkan mereka akan kelemahan-kelemahan yang telah dilakukan para siswa. Untuk itu, siswa diminta untuk melakukan ulang tugas-tugas yang salah tersebut. Tugas ulang ini bukan dimaksudkan untuk menghukum para siswa yang salah, namun dimaksudkan sebagai bagian untuk menyadarkan mereka akan kelemahan-kelemahan mereka dalam mempelajari atau melaksanakan tugas. Karenanya, alternatif format laporan kesalahan atau tugas ulang yang disarankan Perlin (2002: 134) adalah sebagai berikut:

Nama: ………………………………Tanggal: ………………………….**TUGAS ULANG**
Nomor Soal/Masalah: ………

1. Jelaskan secara rinci penyebab kesalahan mengerjakan soal/masalah di atas.
2. Jelaskan secara rinci penyelesaian soal/masalah di atas. *Yakinkan diri untuk menyertakan alasan serta langkah-langkahnya.*
3. Tulis penyelesaian yang benar

Bab V

Penutup

Konsep pendidikan yang tertuang dalam KBK dimaksudkan untuk mengantisipasi kebutuhan SDM Indonesia agar mampu bersaing menghadapi tantangan persaingan global yang akan semakin keras dan tajam. SDM yang diidam-idamkan yang dapat dihasilkan pendidikan di Indonesia adalah SDM yang memiliki keterampilan tinggi, suatu keterampilan yang melibatkan pemikiran kritis, sistematis, logis, kreatif, dan memiliki kemauan bekerja sama yang efektif. Untuk mencapai hal tersebut, kurikulum berbasis kompetensi terbaru ini telah menyatakan pemecahan masalah (*problem-solving*), penalaran (*reasoning*), dan komunikasi (*communication*) sebagai kompetensi dasar disamping kompetensi dasar lainnya yang sudah biasa seperti bilangan, perbandingan, sudut, dan segitiga.

Pada masa lalu, siswa memulai belajar matematika secara deduktif aksiomatis, hal ini sesungguhnya telah mengingkari proses bertumbuh dan berkembangnya matematika. Artinya proses pembelajaran matematika di kelas sudah seharusnya dimulai secara induktif dan setelah itu baru dikembangkan secara deduktif. Disamping penalaran, pemecahan masalah merupakan hal yang sangat penting dan menentukan juga. Alasannya, keterampilan serta kemampuan berpikir yang didapat ketika seseorang memecahkan masalah diyakini dapat ditransfer atau digunakan orang tersebut ketika menghadapi masalah didalam kehidupan sehari-hari. Pada waktu yang lalu masalah diberikan setelah para siswa mempelajari teorinya. Namun pada masa kini, masalah yang diberikan di awal kegiatan sebagai tantangan bagi para siswa harus diupayakan merupakan masalah yang berkait dengan kehidupan nyata para siswa atau dapat dipikirkan siswa (masalah kontekstual). Dengan memberikan masalah pada awal kegiatan, para siswa diberi kesempatan untuk bereksplorasi atau menyelidiki sedemikian sehingga teorema, rumus, dalil, pengertian, maupun konsep baru dapat dimunculkan dari masalah yang dikemukakan pada awal kegiatan tadi. Dengan cara seperti ini, para siswa kita tidak hanya diberikan teori-teori dan rumus-rumus matematika yang sudah jadi, akan tetapi para siswa dilatih dan dibiasakan untuk belajar memecahkan masalah selama proses pembelajaran di kelas sedang berlangsung sedemikian sehingga pemahaman suatu konsep atau pengetahuan haruslah dibangun sendiri (dikonstruksi) oleh siswa (pembelajar).

Disamping penalaran dan pemecahan masalah, kompetensi atau kemampuan mengkomunikasikan ide, pikiran, ataupun pendapat sangatlah penting. Kemampuan mengkomunikasikan ide dan pendapat akan semakin dibutuhkan, sejalan dengan semakin kuatnya tuntutan keterbukaan dan akuntabilitas dari setiap lembaga. Itulah sebabnya, sejak tahun 2000, NCTM mendeklarasikan bahwa program pembelajaran di kelas-kelas TK sampai SMU di Amerika Serikat harus memberi kesempatan kepada para siswa untuk mengkomunikasikan pemikiran matematika mereka secara logis dan jelas kepada teman sejawatnya, gurunya, dan orang lain; di samping memberi kesempatan para siswa untuk menganalisis dan mengevaluasi pemikiran matematika orang lain, serta memberi kesempatan untuk menggunakan bahasa matematika untuk menyatakan ide-ide mereka dengan tepat.

Sekali lagi, tertuangnya tiga kompetensi, yaitu kompetensi yang berkait dengan pemecahan masalah (*problem-solving*), penalaran (*reasoning*), dan komunikasi (*communication*) menuntut para guru untuk melakukan perubahan-perubahan secara mendasar selama proses pembelajaran sedang berlangsung. Perubahan tersebut, terutama dari pendidikan matematika konvensional yang banyak ditandai oleh '*strukturalistik'* dan *'mekanistik'* Nur (2001: 9), ataupun *teacher centred approach, direct instruction, deductive teaching, expository teaching*, maupun *whole class instruction* (Tran Vui, 2001), ataupun *'teaching mathematics by telling'* (Smith, 1996). Strategi pembelajaran seperti dinyatakan di atas dapat dikatakan lebih menekankan kepada para siswa untuk mengingat (*memorizing*) atau menghafal (*rote learning*) dan bukan pada penalaran (*reasoning*), pemecahan masalah (*problem-solving*), dan pemahaman (*understanding*). Para siswa hanya menggunakan *low order thinking* selama proses pembelajaran berlangsung di kelas dan tidak memberi kemungkinan bagi para siswa untuk berpikir dan berpartisipasi secara penuh. Praktek pembelajaran seperti ini sesungguhnya tidak sesuai dengan arah pengembangan dan inovasi pendidikan yang sudah dijelaskan tadi. Pada akhirnya, harapan tertuju pada para guru untuk mencobakan pendekatan terbaru seperti RME (*Realistic Mathematics Education)*, PBL *(Problem Based Learning),* ataupun CTL *(Contextual Teaching & Learning)* melalui perencanaan dan diskusi di MGMP.

Daftar Pustaka

Cockroft, W.H. (1986). *Mathematics Counts*. London: HMSO.

Cooney, T.J., Davis, E.J., Henderson, K.B. (1975). *Dynamics of Teaching Secondary School Mathematics.* Boston : Houghton Mifflin Company.

Copi, I.M. (1978). *Introduction to Logic.* New York: Macmillan.

Depdiknas – Pusat Kurikulum – Balitbang (2002). *Kurikulum Berbasis Kompetensi Mata Pelajaran Matematika.* Jakarta.

DES (1986). *Mathematics From 5 to 16*. London: HMSO.

Giere, R. N. (1984). *Understanding Scientific Reasoning* (2nd Edition). New York: Holt, Rinehart and Winston.

Mcintosh, M.E. & Draper, R.J. (2001). Using learning logs in mathematics. *Mathematics Teacher* Vol 94(7) : 554-557

NCTM (2000). *Principles and Standarts for School Mathematics*. Reston: NTCM.

Nur, M. (2000). *Realistic Mathematics Education.* Makalah, tidak diterbitkan.

Soekardijo, R.G. (1988). *Logika Dasar, Tradisionil, Simbolik dan Induktif*. Jakarta: Gramedia.
Suriasumantri, J.S. (1988). *Filsafat Ilmu.* Jakarta: Sinar Harapan.

Jacobs, H.R. (1982). *Mathematics, A Human Endeavor* (2nd Ed). San Fransisco: W.H. Freeman and Company.

Keraf, G. (1982). *Argumen dan Narasi.* Komposisi Lanjutan III. Jakarta: Gramedia.

Pasmep (1989). *Solve It, Problem Solving in Mathematics III.* Perth: Curtin University of Technology

Perlin, M.H. (2001). Rewrite to improve. *Mathematics Teaching in The Middle School.* Vol 8 (3): 134-1377

Polya, G. (1973). *How To Solve It* (2nd Ed). Princeton: Princeton University Press.

Smith, J.P. (1996). Efficacy and teaching mathematics by telling: a challenge for reform. *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol 27(4) pp 387-402.

Tran Vui (2001). *Practice Trends and Issues in the Teaching and Learning of Mathematics in the Countries.* Penang: Recsam.