Pemanfaatan Pembuktian tidak Langsung dangan Kontradiksi

Fadjar Shadiq
(fadjar_p3g@yahoo.com dan www.fadjarp3g@wordpress.com)

Sejatinya, di dalam kehidupan nyata sehari-hari, penggunaan pembuktian tak langsung *(indirect proof)* sering digunakan meskipun tidak disadari bahwa pembuktian tersebut merupakan pembuktian tidak langsung. Contohnya terjadi ketika Anda sedang asyik membaca lalu tiba-tiba saja listrik di kamar padam. Mungkin setelah itu akan muncul pikiran bahwa padamnya listrik itu terjadi di semua tempat. Sebagai akibat dari pemisalan tersebut, listrik di seluruh kota akan padam, termasuk di rumah-rumah di dekat rumah Anda. Namun, ketika Anda melongok ke luar lewat jendela, ternyata listrik di rumah-rumah yang ada di sekitar rumah Anda masih menyala. Keadaan inilah yang disebut dengan 'kontradiksi'. Artinya, di satu sisi dengan pikiran bahwa listrik padam karena ada masalah di pusat listriknya, dan hal tersebut akan mengakibatkan seluruh listrik akan padam, namun di sisi lain, pada kenyataannya, listriknya tidak padam semua. Kesimpulannya, pikiran atau pemisalan awal tadi bahwa listrik padam karena ada masalah di pusat listriknya adalah tidak benar karena pemisalan awal tadi telah mengakibatkan adanya suatu keadaan yang kontradiktif sehingga harus diingkari.

Tulisan ini akan menunjukkan tentang pemanfaatan pembuktian (cara) tidak langsung dangan kontradiksi pada proses pemecahan masalah logika. Dengan demkian, secara tidak langsung, tulisan ini akan menunjukkan juga bahwa pembuktian (cara) tidak langsung dangan kontradiksi merupakan cara atau metode yang sangat penting dalam proses pemecahan masalah secara umum dan pada proses pemecahan masalah logika secara khusus. Paling tidak ada dua cara pembuktian (cara) tidak langsung, yaitu pembuktian tidak langsung dengan kontraposisi dan pembuktian tidak langsung dengan kontradiksi; namun naskah berikut ini hanya akan membahas pemanfaatan pembuktian (cara) tidak langsung dengan kontradiksi pada proses pemecahan masalah. Di samping itu, tulisan ini akan menunjukkan tentang pentingnya penggunaan sifat dan prinsip logika dalam proses pemecahan masalah. Meskipun judul tulisan ini berkait dengan pemecahan masalah logika, namun untuk memudahkan pembaca, contoh pertamanya akan membahas tentang penyelesaian sistem persamaan aljabar dengan tiga variabel.

Cara Langsung dan Tidak Langsung

Perhatikan masalah atau soal berikut.

Diketahui bahwa:

$a + b = 7$ ..... (1)

$b + c = -2$ ..... (2)

$c + a = -5$ ..... (3)

Buktikan bahwa $a = 1$ bukan penyelesaian sistem persamaan itu.

a. Dengan cara langsung.

b. Dengan cara tidak langsung

Berhentilah membaca untuk beberapa saat. Selesaikan sendiri soal tersebut. Jika Anda mendapatkan soal di atas, apa yang akan Anda lakukan?

a. Penyelesaian dengan Cara Langsung

Salah satu cara langsung adalah sebagai berikut. Tiga persamaan di atas, yaitu persamaan (1), (2), dan (3) dijumlahkan sehingga didapat persamaan (4) berikut.

$$2a + 2b + 2c = 0 \text{ ..... (4)}$$
$$\Leftrightarrow 2(a + b + c) = 0 \text{ ..... (4)}$$
$$\Leftrightarrow a + b + c = 0 \text{ ..... (4)}$$

Jika persamaan (4) dikurangi persamaan (1) akan didapat pengerjaan berkut.

$$\begin{array}{r} a + b + c = 0 \text{ ..... (4)} \\ a + b = 7 \text{ ..... (1)} \\ \hline c = -7 \end{array} \; -$$

Dengan cara sama (analog), jika persamaan (4) dikurangi persamaan (2) akan didapat $a = 2$. Selanjutnya, jika persamaan (4) dikurangi persamaan (3) akan didapat $b = 5$. Jadi, penyelesaian soal di atas adalah $a = 2$. Kata lainnya, $a = 1$ bukan penyelesaian sistem persamaan itu. Penyelesaian dengan cara langsung di atas menunjukkan bahwa dimulai dari yang diketahui, yaitu dari persamaan (1), (2), dan (3) yang dijumlahkan, sehingga didapat persamaan (4), yaitu $a + b + c = 0$ dan seterusnya. Artinya, dengan langkah yang valid atau sahih, dan juga sesuai dengan aksioma ataupun rumus yang ada, pada akhirnya akan didapat $a = 2$. Jadi, $a = 1$ bukan penyelesaian sistem persamaan itu. Sekali lagi, cara di atas merupakan contoh cara langsung.

Lalu, kembali ke pertanyaan nomor (b) di atas, bagaimana dengan pembuktian tidak langsungnya? Berikut ini penjelasannya.

b. Penyelesaian dengan Cara Tidak Langsung

Berhentilah membaca untuk beberapa saat. Selesaikan sendiri soal tersebut. Jika Anda mendapatkan soal di atas, apa yang akan Anda lakukan? Apakah Anda mengalami kesulitan? Perhatikan bahwa Anda diminta untuk membuktikan bahwa a = 1 bukan penyelesaian sistem persamaan itu. Untuk memudahkan Anda, perhatikan sekali lagi sistem persamaan tadi sebagai berikut.

$$a + b = 7 \quad ..... (1)$$
$$b + c = -2 \quad ..... (2)$$
$$c + a = -5 \quad ..... (3)$$

Salah satu cara adalah dengan memisalkan bahwa a = 1 merupakan penyelesaian sistem persamaan itu. Perhatikan bahwa Anda diminta untuk membuktikan bahwa a = 1 bukan penyelesaian sistem persamaan itu, namun yang dimisalkan adalah lawan atau negasinya, yaitu dimisalkan bahwa a = 1 merupakan penyelesaian sistem persamaan itu.

Karena sudah dimisalkan bahwa a = 1, maka dari persamaan (1), yaitu $a + b = 7 \rightarrow 1 + b = 7$, sehingga didapat b = 6. Selanjutnya, dari b = 6 jika digunakan atau disubstitusikan pada persamaan (2), yaitu $b + c = -2 \rightarrow 6 + c = -2$, sehingga didapat bahwa c = –8. Sampai di sini, jika dimisalkan a = 1 dan dilakukan pengerjaan yang benar dan sahih atau valid pada persamaan (1) dan (2) akan didapat dua nilai lainnya, yaitu b = 6 dan c = –8. Namun jika ketiga nilai dimaksud, yaitu a = 1, b = 6 dan c = –8 disubstitusikan atau digantikan ke persamaan (1), yaitu c + a = –5 akan didapat $-8 + 1 = -5 \rightarrow -7 = -5$, suau keadaan yang kontradiktif (*contradiction*) dan tidak masuk akal (*absurd*) di mana –7 = –5. Simpulannya, pemisalan bahwa a = 1 adalah tidak benar. Kata lainnya, a = 1 bukan penyelesaian sistem persamaan itu.

Perhatikan bahwa dengan langkah yang benar dan valid, kita sampai pada keadaan yang tidak masuk akal (*absurd*) dan kontradiktif. Pertanyaan yang dapat diajukan di antaranya adalah: ”Mengapa hal seperti ini dapat terjadi dan apa yang menyebabkan?”. Simpulannya, pemisalan bahwa a = 1 adalah tidak benar. Kata lainnya, a = 1 bukan penyelesaian sistem persamaan itu.

Pengertian dan Pentingnya

Dengan contoh di atas, jelaslah kiranya bahwa penyelesaian dengan cara tak langsung dengan kontradiksi adalah suatu cara yang menggunakan pemisalan suatu ingkaran pernyataan yang akan dibuktikan tadi sebagai hal yang benar, namun dengan langkah-langkah yang logis, pemisalan ini mengarah ke suatu keadaan yang kontradiksi, sehingga pemisalan tersebut dinyatakan sebagai hal yang salah. Artinya negasi dari negasi pernyataan tersebut sebagai hal yang benar. Kesimpulan akhirnya, pernyataan yang akan dibuktikan tersebut merupakan pernyataan yang benar.

Cooney, Davis, dan Henderson (1975:313) menyatakan bahwa pembuktian tak langsung adalah strategi yang sangat hebat karena penalaran tersebut dapat digunakan untuk membuktikan kebenaran hampir semua pernyataan. Ketiganya (1975:313) lalu menyatakan: *"A special form of indirect proof is reductio ad absurdum"*. Artinya, bentuk khusus dari pembuktian tidak langsung adalah menggunakan '*reductio ad absurdum*'. Namun Borrowski dan Borwein (1989:289) menyatakan bahwa : *"Indirect proof is a common mathematical term for reductio ad absurdum"*. Bentuk *reductio ad absordum* ini dikenal juga sebagai penalaran melalui kontradiksi. Secara umum, pada pembuktian tidak langsung dengan kontradiksi, untuk membuktikan kebenaran pernyataan p misalnya, maka dimisalkan negasi atau ingkaran tersebut yang terjadi yaitu ~p. Lalu dibuktikan bahwa ~p ini mengarah kepada suatu kontradiksi, sesuatu yang *absurd*, sesuatu yang tidak masuk akal. Karena ~p mengarah kesuatu keadaan yang kontradiksi, maka pemisalan ~p dianggap salah. Jadi, kesimpulan bahwa p benar seperti yang akan dibuktikan.

Penggunaannya pada Pemecahan Masalah

Perhatikan masalah berikut. Berhentilah membaca untuk beberapa saat. Selesaikan sendiri soal tersebut. Jika Anda mendapatkan soal di atas, apa yang akan Anda lakukan? Apakah Anda mengalami kesulitan? Bagaimana memanfaatkan pembuktian atau cara tidak langsung pada pemecahan masalah tersebut?

Salah seorang di antara Alfan, Bravo, Charlie, atau Deltawan merupakan pencuri uang Profesor Pythagoras. Sang Profesor mengetahui pencurinya. Meskipun demikian, asistennya diberi tugas untuk menemukan sang pencuri. Di depan sang professor dan asistennya, keempat anak yang merupakan tertuduh menyatakan hal-hal berikut.

Alfan : "Bukan saya pencurinya."
Bravo : "Alfan berbohong."
Charlie : "Bravo yang berbohong, Pak."
Deltawan : "Bravo yang mencuri."

Profesor Pythagoras membisikkan pada asistennya bahwa hanya satu pernyataan saja yang benar dari empat pernyataan itu. Berdasar bisikan tersebut dan setelah berpikir agak lama, sang asisten dapat menentukan pencurinya dengan tepat. Tentukan pencuri tersebut. Mengapa? Jelaskan.

Petunjuk: Perhatikan pernyataan Alfan dan Bravo.

++++

Beberapa hal yang perlu mendapatkan perhatian pada soal di atas adalah:
a. Salah seorang di antara Alfan (A), Bravo (B), Charlie (C), atau Deltawan (D) yang mencuri.
b. Hanya satu dari empat pernyataan itu yang bernilai benar.

Langkah pertama yang dapat dilakukan adalah dengan memisalkan bahwa Deltawan (D) sebagai pencurinya. Dengan pemisalan bahwa D adalah pencurinya, akan mengakibatkan hal-hal berikut.

i. Pernyataan Alfan yang menyatakan bahwa dirinya bukan pencurinya bernilai benar. Kata lainnya, Alfan berkata benar atau ia tidak berbohong.
ii. Selanjutnya, pernyataan Bravo bahwa Alfan berbohong bernilai salah. Kata lainnya, Bravo berkata tidak benar atau ia berbohong.
iii. Berikutnya, pernyataan Charlie bahwa Bravo berbohong menjadi bernilai benar.
iv. Terakhir, pernyataan Deltawan bahwa Bravo yang mencuri bernilai salah juga. Sekali lagi karena sudah dimisalkan bahwa Deltawan (D) sebagai pencurinya.

Perhatikan, bahwa pemisalan Deltawan (D) sebagai pencurinya telah mengakibatkan bahwa dua dari empat pernyataan, yaitu pernyataan Alfan dan Charlie, bernilai benar. Namun hal ini bertentangan (kontradiktif) dengan ketentuan (b) di atas bahwa hanya satu dari empat pernyataan itu yang bernilai benar. Simpulannya, pemisalan bahwa Deltawan (D) sebagai pencurinya tidak mungkin bernilai benar karena telah mengakibatkan keadaan yang bertentangan. Jadi, Deltawan bukanlah pencurinya. Hal yang bertentangan (kontradiktif) akan terjadi juga jika dimisalkan Bravo (B) ataupun Charlie (C) sebagai pencurinya. Simpulan terakhirnya, bukan Bravo (B), Charlie (C), ataupun Deltawan (D) sebagai pencurinya. Jadi, pencurinya adalah Alfan (A).

Penutup

Demikian sedikit gambaran mengenai pembuktian tidak langsung dengan kontradiksi beserta bedanya dengan pembuktian langsung yang sudah dikenal para guru. Kegiatan pembuktian ini, terutama pembuktian yang mendasar seperti pembuktian langsung, tidak langsung, dan induksi matematika, sangat penting diketahui dan dikuasai para siswa mengingat lemahnya kemampuan bernalar para siswa kita. Contohnya, hanya dengan beberapa contoh saja, siswa lalu menyimpulkan kebenaran suatu teorema. Sejatinya, dengan kegiatan pembuktian ini, diharapkan akan adanya penataan kemampuan bernalar para siswa kita. Namun di sisi lain, pengetahuan prasyarat yang sangat diperlukan pada kegiatan pembuktian ini harus dibenahi lebih dahulu, sehingga ketika para siswa sampai pada kegiatan memanipulasi, para siswa tidak akan mengalami kesulitan ketika mempelajarinya. Mudah-mudahan artikel ini dapat membantu para guru matematika.

Daftar Pustaka

Cooney, T.J., Davis, E.J., Henderson, K.B. (1975). *Dynamics of Teaching Secondary School Mathematics.* Boston: Houghton Mifflin Company.

Depdiknas (2003). *Kurikulum 2004. Standar Kompetensi mata Pelajaran Matematika SMA dan MA*. Jakarta: Depdiknas