

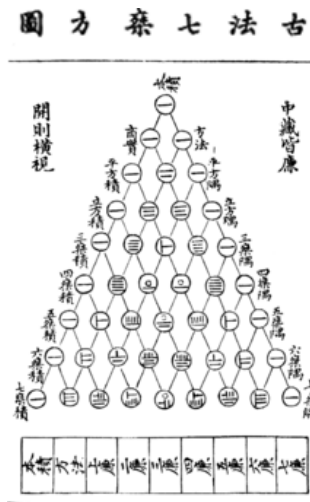
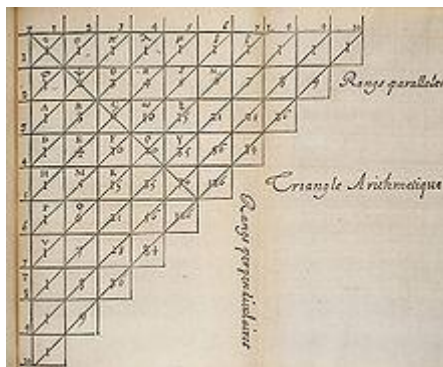
Perluasan Segitiga Pascal

Untung Trisna S.
ontongts@yahoo.com
PPPPTK Matematika
Yogyakarta
2011

“The moving power of mathematical invention is not reasoning but imagination.”

*Augustus De Morgan
(27 Jun 1806 – 18 Mar 1871)*

Segitiga Pascal merupakan koefisien-koefisien binomial yang tersusun dalam bentuk segitiga. Bentuk susunan segitiga ini muncul dalam tulisan Blaise Pascal yang berjudul *Traité du triangle arithmétique* (1653). Meski dikenal dengan nama Pascal, ternyata segitiga Pascal telah dipelajari beberapa abad sebelumnya seperti oleh Al-Karaji (953 – 1029), Omar Khayyam (1048 – 1131), Jia Xian (1010 – 1070) dan Yang Hui (1238 – 1290).



Gb. 1. Segitiga Pascal Versi Blaise Pascal

Gb. 2. Segitiga Pascal Versi Yang Hui

Sumber gambar: http://en.wikipedia.org/wiki/Pascal's_triangle

Koefisien binomial dapat diinterpretasikan dalam beberapa cara. Dalam kombinatorik, koefisien binomial yang dilambangkan dengan $\binom{n}{r}$ merupakan banyak cara membuat himpunan bagian dengan r elemen dari suatu himpunan dengan n elemen. Sedangkan secara aljabar, koefisien binomial merupakan koefisien suku $a^r b^{n-r}$ pada ekspansi $(a + b)^n$ untuk n bilangan cacah. Sebagai contoh

$$(x + y)^4 = \binom{4}{0} x^4 y^0 + \binom{4}{1} x^3 y^1 + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} x^1 y^3 + \binom{4}{4} x^0 y^4$$

Secara umum, dituliskan dalam notasi sigma sebagai

$$(x + y)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^{n-r} y^r$$

Jika di sekolah menengah umumnya siswa mengenal $\binom{n}{r}$ untuk n dan r cacah, maka berikut ini akan dicoba ekspansi koefisien binomial untuk n bulat negatif dan diselidiki apakah sifat-sifat pada koefisien binomial dengan n cacah berlaku juga untuk n bulat negatif.

Kesepakatan Notasi Binomial

Mengacu pada Hilton & Pedersen (1999), untuk menonjolkan sifat simetri elemen-elemen segitiga pascal yang biasanya dituliskan sebagai koefisien binomial $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$, dalam pembahasan di sini notasi binomial dituliskan sebagai

$$\binom{n}{r \ s} = \frac{n!}{r!s!}, \text{ dengan } r + s = n$$

Definisi dan sifat-sifat Koefisien Binomial

Definisi

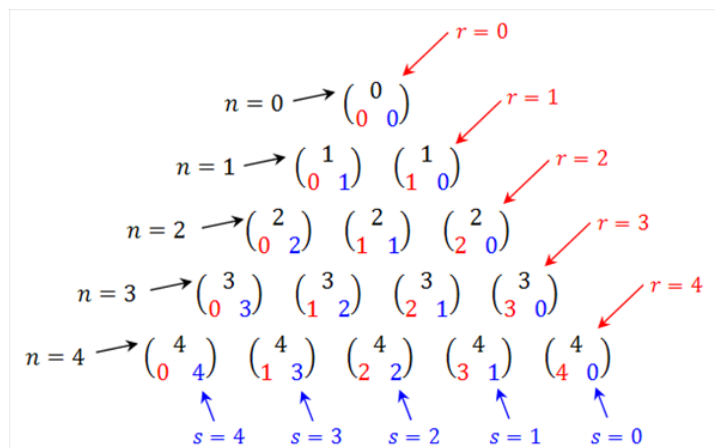
Untuk n, r bilangan bulat dan $0 \leq r \leq n$, dan $r + s = n$ koefisien binomial $\binom{n}{r \ s}$ didefinisikan sebagai:

$$\binom{n}{r \ s} = \frac{n!}{r!s!}$$

untuk n, r yang lain

$$\binom{n}{r \ s} = 0$$

Susunan segitiga Pascal dalam notasi yang lengkap ditunjukkan oleh gambar berikut.



Gb. 3. Susunan Segitiga Pascal Koefisien Binomial

Perhatikan bahwa dalam segitiga tersebut terdapat dua arah sepanjang n dan r dimana dalam setiap arah, salah satu dari n atau r bernilai konstan.

Teorema 1 (Identitas Pascal)

Untuk n, r bilangan bulat, $n \geq 1$, dan $0 \leq r \leq n$, berlaku

$$\binom{n}{r \ s} = \binom{n-1}{r-1 \ s} + \binom{n-1}{r \ s-1}.$$

Bukti:

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{r-1 \ s} + \binom{n-1}{r \ s-1} &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!s!} + \frac{(n-1)!}{r!(s-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!r}{r!s!} + \frac{(n-1)!s}{r!s!} \\ &= \frac{(n-1)!(r+s)}{r!s!} \\ &= \frac{n!}{r!s!} \\ &= \binom{n}{r \ s} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

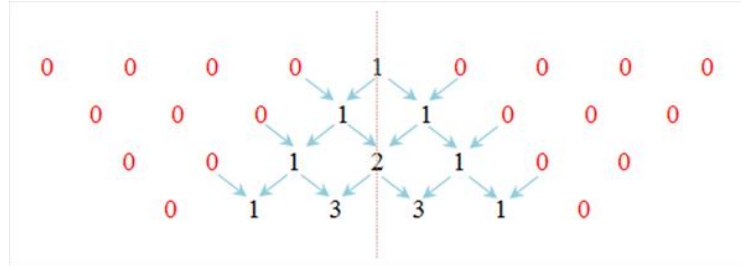
Teorema 2 (Identitas Simetri)

Untuk n, r bilangan bulat dan $0 \leq r \leq n$, berlaku $\binom{n}{r \ s} = \binom{n}{s \ r}$.

Bukti:

$$\binom{n}{r \ s} = \frac{n!}{r!s!} = \frac{n!}{s!r!} = \binom{n}{s \ r} \quad \blacksquare$$

Berdasarkan teorema 1, cukup dengan menghitung nilai $\binom{0}{0} = 1$, segitiga Pascal dapat disusun dengan mudah yaitu dengan menjumlahkan dua suku terdekat pada baris di atasnya.



Gb. 4. Identitas Pascal dan Identitas Simetri

Sementara itu, konsekuensi dari teorema 2 adalah elemen-elemen segitiga Pascal memiliki simetri terhadap garis vertikal melalui puncak segitiga.

Koefisien Binomial untuk n bulat negatif

Untuk mendefinisikan $\binom{n}{r}$ dengan n negatif perhatikan uraian berikut.

Pandang deret geometri konvergen dengan suku pertama 1, rasio x dan $|x| < 1$. Jumlah tak hingga suku-suku deret tersebut dapat dinyatakan dengan

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \dots = \frac{1}{1-x} \quad (1)$$

Perhatikan bahwa $(1+x)^{-1} = \frac{1}{1-(-x)}$, akibatnya

$$\begin{aligned} (1+x)^{-1} &= 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + (-x)^4 + \dots \\ (1+x)^{-1} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Jika kedua ruas pada persamaan (2) didiferensialkan, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d(1+x)^{-1}}{dx} &= \frac{d(1-x+x^2-x^3+x^4+\dots)}{dx} \\ \frac{d(1+x)^{-1}}{d(1+x)} \cdot \frac{d(1+x)}{dx} &= -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + \dots \\ -(1+x)^{-2} &= -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + \dots \\ (1+x)^{-2} &= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Jika kedua ruas pada persamaan (3) didiferensialkan kembali, diperoleh

$$(1+x)^{-3} = 1 - \binom{3 \cdot 2}{2} x + \binom{4 \cdot 3}{2} x^2 - \binom{5 \cdot 4}{2} x^3 + \binom{6 \cdot 5}{2} x^4 - \dots$$

Dengan mendiferensialkan berulang-ulang dari hasil yang diperoleh sebelumnya, didapatkan

$$(1+x)^{-4} = 1 - \left(\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2}\right)x + \left(\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2}\right)x^2 - \left(\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2}\right)x^3 + \left(\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2}\right)x^4 - \dots$$

$$(1+x)^{-5} = 1 - \left(\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2}\right)x + \left(\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2}\right)x^2 - \left(\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2}\right)x^3 + \left(\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2}\right)x^4 - \dots$$

Dari generalisasi bentuk yang diperoleh pada proses di atas, untuk $|x| < 1$ dan n bulat negatif didapatkan

$$(1+x)^n = \frac{(-n-1)!}{(-n-1)!0!}x^0 - \frac{(-n)!}{(-n-1)!1!}x^1 + \frac{(-n+1)!}{(-n-1)!2!}x^2 - \frac{(-n+2)!}{(-n-1)!3!}x^3 + \dots$$

Dalam notasi sigma dapat ditulis sebagai

$$(x+1)^n = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(-n-1+r)!}{(-n-1)!r!} x^r \quad (4)$$

Berdasarkan hasil (4), pandang bentuk $(a+b)^n$ dengan $n < 0$.

Untuk kasus $|a| < |b|$ akibatnya $\left|\frac{a}{b}\right| < 1$, sehingga berlaku

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= b^n \left(1 + \frac{a}{b}\right)^n \\ &= b^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(-n-1+r)!}{(-n-1)!r!} \left(\frac{a}{b}\right)^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(-n-1+r)!}{(-n-1)!r!} a^r b^{n-r} \end{aligned}$$

Misalkan $n - r = s$, maka

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(-s-1)!}{(-n-1)!r!} a^r b^s \quad (5)$$

Sementara itu, untuk kasus $|a| > |b|$ akibatnya $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$, sehingga berlaku

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \\ &= a^n \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(-n-1+s)!}{(-n-1)!s!} \left(\frac{b}{a}\right)^s \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(-n-1+s)!}{(-n-1)!s!} a^{n-s} b^s \end{aligned} \quad (6)$$

Misalkan $n - s = r$, karena $n < 0$ dan $s \geq 0$ maka $r < 0$ dan bentuk (6) dapat diubah menjadi

$$(a+b)^n = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(-r-1)!}{(-n-1)!s!} a^r b^s \quad (7)$$

Pada bentuk (5), pangkat dari a merupakan bilangan cacah. Sedangkan pada bentuk (6) karena $n \leq 0$ dan $r \geq 0$ maka pangkat dari a adalah negatif.

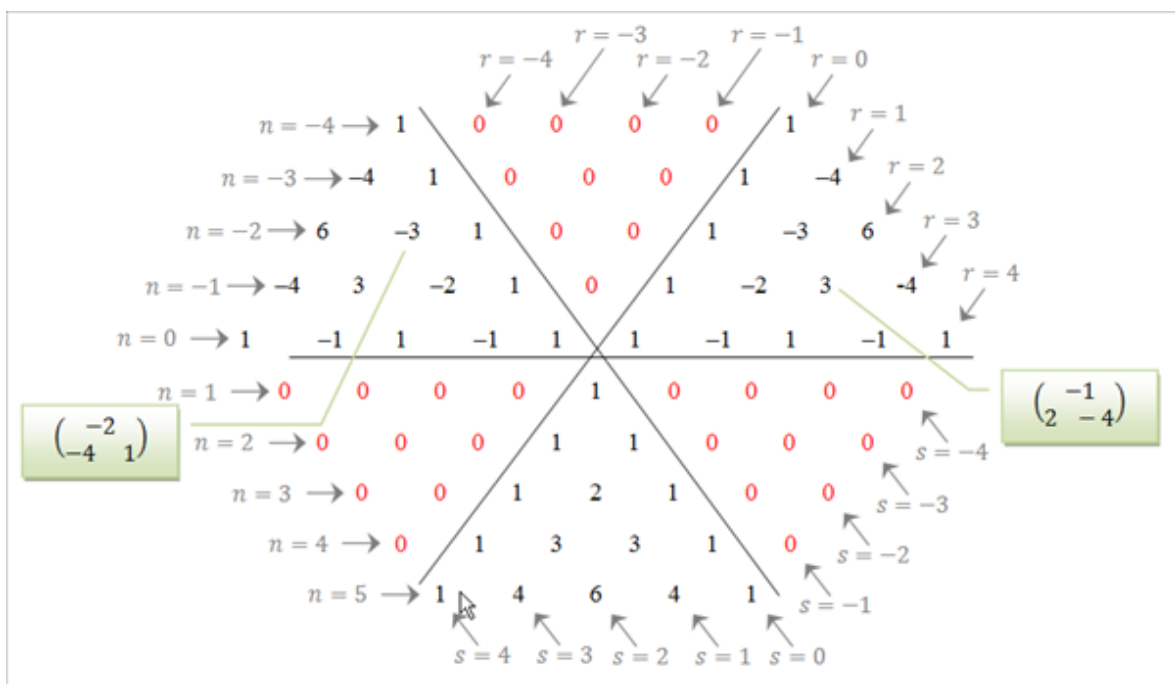
Berdasarkan (5) dan (7) dapat didefinisikan $\binom{n}{r}$ untuk n bulat negatif sebagai berikut:

Definisi

Untuk n, r, s bilangan bulat, $n < 0$ dan $r + s = n$,

1. $\binom{n}{r \ s} = (-1)^r \binom{-s-1}{r \ -n-1}$ untuk $r \geq 0$ dan $s < 0$
2. $\binom{n}{r \ s} = (-1)^s \binom{-r-1}{-n-1 \ s}$ untuk $r < 0$ dan $s \geq 0$
3. $\binom{n}{r \ s} = 0$ untuk $r < 0$ dan $s < 0$

Setelah berhasil didefinisikan koefisien binomial untuk n negatif, maka bentuk segitiga Pascal yang semula hanya untuk $n \geq 0$ dapat diperluas menjadi segienam Pascal.



Gb. 5. Segienam Pascal

Perhatikan pada segienam Pascal di atas, untuk bagian $n \geq 0$ termuat segitiga Pascal. Sebagaimana telah ditunjukkan di muka, segitiga Pascal memiliki sifat simetri dan identitas Pascal dimana elemen-elemen untuk $n \geq 1$ dapat diperoleh dengan menjumlahkan dua suku terdekat di atasnya. Selanjutnya bagaimana dengan bagian segienam Pascal untuk $n < 0$? Jika dilihat pola yang terjadi, ternyata sifat simetri dan identitas Pascal tetap berlaku. Sebagai contoh perhatikan untuk $n = -1$, $r = 3$, dan $s = -4$ yang hasilnya adalah 3. Ternyata jumlah dua suku terdekat di atasnya (-3 dan 6) menghasilkan 3 juga. Apakah sifat ini berlaku secara umum? Berikut ini diberikan buktinya.

Teorema 3 (Identitas Pascal pada Segienam Pascal)

Untuk n, r, s bilangan bulat, $r + s = n$ dan $n < 0$,

$$\binom{n}{r \ s} = \binom{n-1}{r-1 \ s} + \binom{n-1}{r \ s-1}$$

Bukti:

Tanpa mengurangi keumuman, untuk kasus $s < 0$,

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{r-1 \ s} + \binom{n-1}{r \ s-1} &= (-1)^{r-1} \frac{(-s-1)!}{(r-1)!(-n+1-1)!} + (-1)^r \frac{(-s+1-1)!}{r!(-n+1-1)!} \\ &= (-1)^{r-1} \frac{(-s-1)!r}{(r-1)!(-n)!r} + (-1)^r \frac{(-s)(-s-1)!}{r!(-n)!} \\ &= (-1)^r \frac{(-s-1)!(-r)}{r!(-n)!} + (-1)^r \frac{(-s)(-s-1)!}{r!(-n)!} \\ &= (-1)^r \frac{(-s-1)!(-r-s)}{r!(-n)!} \\ &= (-1)^r \frac{(-s-1)!(-n)}{r!(-n)!} \\ &= (-1)^r \frac{(-s-1)!}{r!(-n-1)!} \\ &= \binom{n}{r \ s} \end{aligned}$$

Dengan jalan yang sama dapat ditunjukkan untuk $s > 0$. ■

Teorema 4 (Identitas Simetri pada Segienam Pascal)

Untuk n, r, s bilangan bulat, $r + s = n$ dan $n < 0$, berlaku:

$$\binom{n}{r \ s} = \binom{n}{s \ r}$$

Bukti:

Tanpa mengurangi keumuman, akan ditunjukkan untuk $s < 0$.

$$\begin{aligned} \binom{n}{r \ s} &= (-1)^r \binom{-s-1}{r \ -n-1} \\ &= (-1)^r \frac{(-s-1)!}{r!(-n-1)!} \\ &= (-1)^r \frac{(-s-1)!}{(-n-1)!r!} \\ &= \binom{n}{s \ r} \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan bahwa diperoleh $\binom{n}{s \ r}$ ■

Kesimpulan

Dari uraian di atas dapat disimpulkan, dengan menggunakan materi matematika SMA tentang deret geometri tak hingga, turunan (diferensial), kombinasi, ditambah dengan sedikit imajinasi, koefisien binomial yang semula hanya berlaku untuk $n \geq 0$ dapat diperluas untuk n negatif. Akibat dari perluasan tersebut adalah segitiga Pascal dapat dikembangkan menjadi segienam Pascal. Tidak hanya berhasil diperluas, ternyata dapat dibuktikan juga bahwas ifat-sifat yang terdapat dalam segitiga Pascal, yaitu identitas Pascal dan identitas simetri berlaku juga dalam segienam Pascal.

Bahan Bacaan:

http://en.wikipedia.org/wiki/Pascal's_triangle#cite_note-Karaji-4

P. Hilton & J. Pedersen, (1999), Relating Geometri and Algebra in the Pascal Triangle, Hexagon, Tetrahedron, and Cuboctahedron. Part I: Binomial Coefficients, Extended Binomial Coefficients and Preparation for Further Work, *The College Mathematics Journal*, **3**, 170-186.