

# LOGIKA

JENJANG LANJUT

Fadjar Shadiq, M.App.Sc.

**DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL**

**DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN  
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA  
YOGYAKARTA**

**2009**



## Daftar Isi

Kata Pengantar	-----	i
Daftar Isi	-----	ii
Kompetensi/Sub Kompetensi dan Peta Bahan Ajar	-----	iii
Skenario Pembelajaran	-----	iv
Bab I	Pendahuluan	----- 1
	A. Latar Belakang	----- 1
	B. Tujuan	----- 1
	C. Cara Penggunaan Paket	----- 1
Bab II	Tautologi, Ekuivalensi, dan Kontradiksi	----- 2
	A. Tautologi dan Kontradiksi	----- 2
	B. Ekuivalensi	----- 3
Bab III	Penarikan Kesimpulan	----- 6
	A. Penarikan Kesimpulan atau Argumen	----- 6
	B. Sahih Tidaknya Penarikan Kesimpulan	----- 7
	C. Beberapa Penarikan Kesimpulan yang Sahih	----- 9
Bab IV	Bukti Langsung dan Bukti Tidak Langsung	----- 17
	A. Pembuktian Langsung	----- 17
	B. Pembuktian Tidak Langsung	----- 18
Bab V	Induksi Matematika	----- 22
	A. Pendahuluan	----- 22
	B. Prinsip Induksi Matematika	----- 23
	C. Contoh Induksi Matematika	----- 25
Bab VI	Penutup	----- 28
Daftar Pustaka	-----	29

## **KOMPETENSI**

Memiliki kemampuan untuk mengembangkan keterampilan siswa dalam melakukan penalaran secara logis dan kritis.

### **SUB KOMPETENSI**

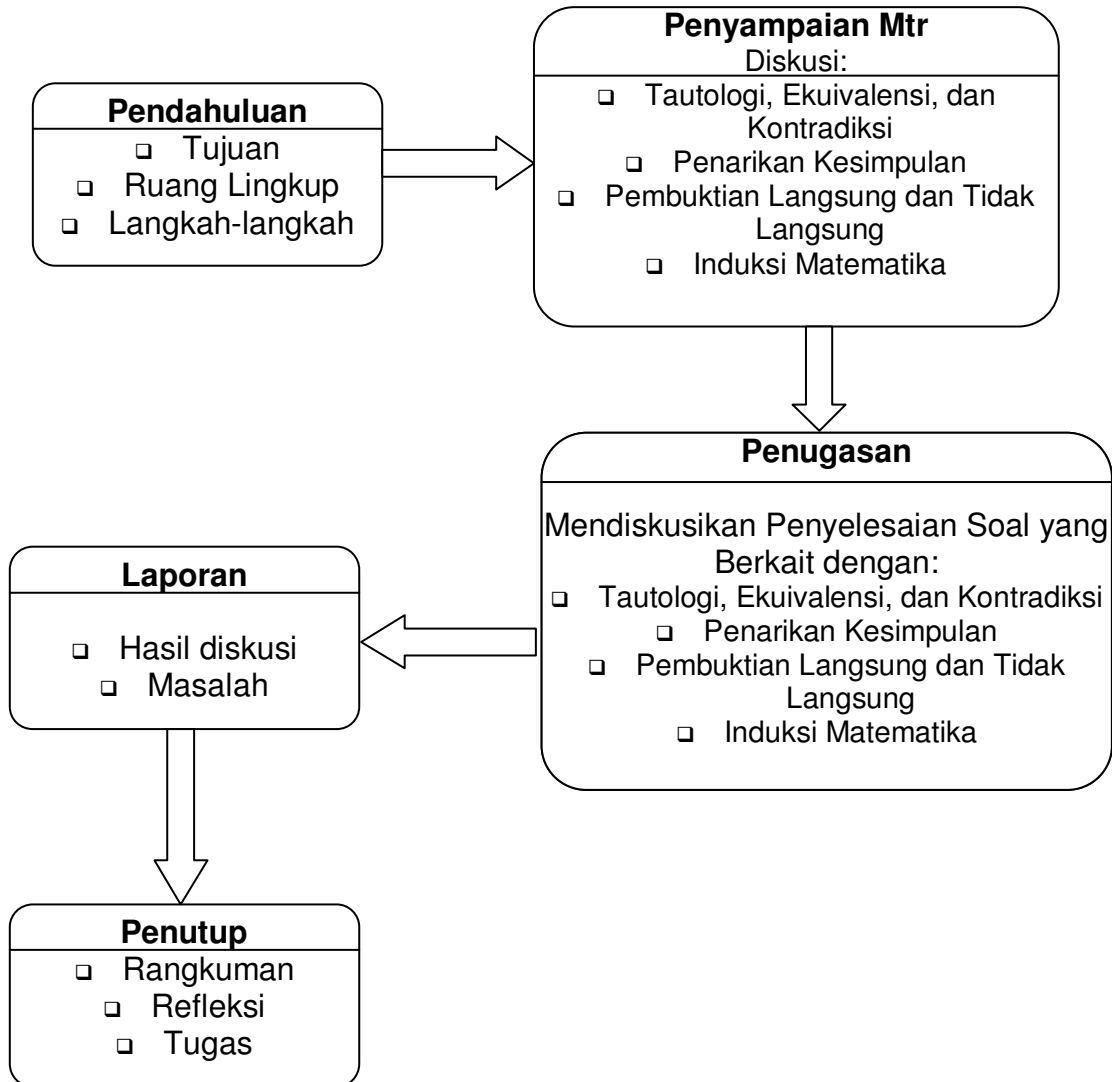
- Memiliki kemampuan menjelaskan perbedaan antara tautologi, ekuivalensi, dan kontradiksi dan dapat menerapkan rumus-rumus ekuivalensi dalam proses penyelesaian soal-soal logika matematika.
- Memiliki kemampuan menentukan kesimpulan yang sah dari premis-premis tertentu dan dapat menentukan kesahihan ataupun ketidaksahihan suatu penarikan kesimpulan, terutama yang berkait dengan silogisme, modus ponens, dan modus tolens.
- Memiliki kemampuan memberi contoh pembuktian langsung dan tidak langsung dan dapat membuktikan rumus-rumus matematika secara langsung maupun tidak langsung.
- Memiliki kemampuan membuktikan rumus-rumus matematika yang pembuktiannya menggunakan induksi matematika.

### **PETA BAHAN AJAR**

Mata diklat untuk jenjang lanjut ini membutuhkan pengetahuan prasyarat yang sudah dibahas pada diklat jenjang dasar, seperti nilai kebenaran suatu pernyataan tunggal dan majemuk, implikasi beserta konvers, invers, dan kontraposisinya; negasi dari bentuk-bentuk tadi; pernyataan berkuantor dan negasinya.

Selama proses diklat, diharapkan akan muncul juga diskusi tentang bagaimana cara mengajarkan topik-topik tersebut dan memecahkan masalah pembelajaran yang berkait dengan terutama yang berkait dengan penarikan kesimpulan dengan menggunakan silogisme, modus ponens, dan modus tolens; pembuktian langsung dan tidak langsung; serta pembuktian dengan induksi matematika.

## SKENARIO PEMBELAJARAN



# **Bab I**

## **Pendahuluan**

### **A. Latar Belakang**

Kurikulum 2004, untuk mata pelajaran matematika SMA dan MA (Depdiknas, 2003:9) menyatakan tentang standar kompetensi 1, salah satunya adalah menggunakan operasi dan sifat logika matematika. Jabarannya adalah dalam bentuk kompetensi dasar (Depdiknas, 2003:13) berikut: "Menggunakan sifat dan prinsip logika untuk penarikan kesimpulan dan pembuktian sifat matematika." Indikator keberhasilannya adalah:

- Menarik kesimpulan dengan silogisme, modus ponens, dan modus tollens.
- Membuktikan sifat matematika dengan bukti langsung.
- Membuktikan sifat matematika dengan bukti tidak langsung (kontraposisi dan kontradiksi)
- Membuktikan sifat dengan induksi matematika

Materi di atas belum dibahas pada diklat jenjang dasar, sehingga pada diklat jenjang lanjut kali ini materi tersebut akan dibahas

### **B. Tujuan**

Modul ini disusun dengan maksud untuk memberikan tambahan pengetahuan berupa wawasan bagi guru SMA yang mengikuti pelatihan di PPPG Matematika, dengan harapan dapat digunakan sebagai salah satu sumber untuk memecahkan masalah-masalah pengajaran Logika Matematika SMA dan dapat digunakan juga sebagai bahan pengayaan wawasan para guru sehingga bahan yang disajikan dapat lebih mudah dicerna para siswa, terutama yang berkaitan dengan penarikan kesimpulan dengan menggunakan silogisme, modus ponens, dan modus tollens; pembuktian langsung dan tidak langsung; serta pembuktian dengan induksi matematika.

### **C. Cara Penggunaan Modul**

Pembahasan pada modul ini lebih menitik-beratkan pada beberapa hal di atas. Setiap bagian modul ini dimulai dengan teori-teori, diikuti beberapa contoh dan diakhiri dengan latihan. Di samping itu, dikemukakan juga tentang hal-hal penting yang perlu mendapat penekanan para guru di saat membahas pokok bahasan ini di kelasnya. Karenanya, para pemakai modul ini disarankan untuk membaca lebih dahulu teorinya sebelum mencoba mengerjakan latihan yang ada, yang untuk mempermudahnya telah disiapkan juga kunci jawabannya. Jika para pemakai modul ini mengalami kesulitan maupun memiliki saran, sudi kiranya menghubungi penulisnya, melalui *email*: fadjar\_p3g@yahoo.com, HP 08156896973 atau melalui PPPG Matematika, Kotak Pos 31 YKBS, Yogyakarta.

## Bab II

### Tautologi, Ekuivalensi, dan Kontradiksi

Suatu pernyataan (termasuk teori) tidak akan ada artinya jika tidak bernilai benar. Karenanya, pembicaraan mengenai benar tidaknya suatu kalimat yang memuat suatu teori telah menjadi pembicaraan dan perdebatan para ahli filsafat dan logika sejak dahulu kala. Untuk menjelaskan tentang kriteria kebenaran ini perhatikan dua kalimat berikut:

- a. Semua mangga arummanis yang berkulit hijau, masam rasanya.
- b. Besar sudut pusat adalah dua kali sudut keliling

Pernyataan pertama bernilai benar karena hal-hal yang terkandung di dalam pernyataan itu tidak sesuai dengan kenyataannya. Sedangkan pernyataan kedua bernilai benar karena bersifat koheren, konsisten, atau tidak bertentangan dengan pernyataan-pernyataan sebelumnya yang dianggap benar. Bagian lain yang perlu mendapat perhatian adalah negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi maupun biimplikasi beserta nilai-nilai kebenarannya. Bagian berikut akan membahas tentang beberapa kasus khusus dari pernyataan majemuk yang nilai kebenarannya selalu benar ataupun yang selalu salah, serta akan membahas juga tentang ekuivalensi.

#### A. Tautologi dan Kontradiksi

Jika bujangan diartikan sebagai orang yang belum menikah, lalu dimisalkan:

$p$  : Ali adalah seorang bujangan

$\sim p$  : Ali adalah bukan seorang bujangan (sudah menikah).

Dari dua pernyataan tunggal di atas, jika dirangkaikan akan didapat dua pernyataan berikut:

1. Ali adalah seorang bujangan atau Ali sudah menikah.
2. Ali adalah seorang bujangan dan Ali sudah menikah.

Dua pernyataan majemuk di atas dapat dinyatakan dengan:

1.  $p \vee \sim p$
2.  $p \wedge \sim p$

Tabel kebenaran dari dua pernyataan majemuk di atas adalah:

$p$	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$
B	S	B	S
S	B	B	S

Kolom ke-3 tabel di atas, yaitu pernyataan majemuk  $p \vee \sim p$  akan selalu bernilai benar. Tidak ada pengaruh dari nilai kebenaran  $p$  terhadap pernyataan  $p \vee \sim p$  yang akan selalu bernilai benar. Alasannya, jika  $p$  bernilai benar maka  $\sim p$  akan bernilai salah dan jika  $p$  bernilai salah maka  $\sim p$  akan bernilai benar, sehingga salah satu dari dua pernyataan tunggal yang ada di pernyataan majemuk  $p \vee \sim p$  akan bernilai benar, sehingga berakibat pernyataan  $p \vee \sim p$  akan selalu bernilai benar. Hal seperti itu dapat terjadi karena pernyataan majemuk  $p \vee q$  hanya akan bernilai salah jika kedua pernyataan tunggalnya bernilai salah dan yang selain itu akan bernilai benar. Pernyataan  $p \vee \sim p$  merupakan contoh dari tautologi. Intinya, tautologi adalah suatu

pernyataan majemuk yang selalu bernilai benar untuk setiap kombinasi nilai-nilai kebenaran dari pernyataan tunggal pembentuknya.

Kolom ke-4 tabel di atas, yaitu pernyataan majemuk  $p \wedge \sim p$  akan selalu bernilai salah. Tidak ada pengaruh dari nilai kebenaran  $p$  terhadap pernyataan majemuk  $p \wedge \sim p$ . Alasannya, jika  $p$  bernilai benar maka  $\sim p$  akan bernilai salah dan jika  $p$  bernilai salah maka  $\sim p$  akan bernilai benar, sehingga salah satu dari dua pernyataan tunggal yang ada di pernyataan majemuk  $p \wedge \sim p$  akan bernilai salah. Karena setiap pernyataan majemuk  $p \wedge q$  hanya akan bernilai benar jika kedua pernyataan tunggalnya bernilai benar, maka hal ini berakibat bahwa pernyataan  $p \wedge \sim p$  akan selalu bernilai salah. Pernyataan  $p \wedge \sim p$  yang selalu bernilai salah ini merupakan contoh dari kontradiksi. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa kontradiksi adalah suatu pernyataan majemuk yang selalu bernilai salah untuk setiap kombinasi nilai-nilai kebenaran dari pernyataan tunggal pembentuknya.

Kontingensi (contingency) adalah suatu pernyataan majemuk yang bernilai benar untuk beberapa pergantian nilai kebenaran dari pernyataan tunggalnya dan bernilai salah untuk pergantian nilai kebenaran dari pernyataan tunggal lainnya. Contoh dari kontingensi adalah pernyataan  $(\sim p \wedge r) \wedge (\sim r \Rightarrow q)$ . Untuk menunjukkan bahwa pernyataan tersebut adalah suatu kontingensi dapat digunakan tabel kebenaran.

## B. Ekuivalensi

Jika  $p$  adalah pernyataan "Saya sudah makan.", maka  $\sim p$  adalah pernyataan "Saya belum makan." atau "Tidak benar bahwa saya sudah makan.", dan  $\sim(\sim p)$  adalah pernyataan "Tidak benar bahwa saya belum makan.". Jika  $p$  bernilai B, maka  $\sim p$  bernilai S, dan  $\sim(\sim p)$  akan bernilai B. Dengan demikian jelaslah bahwa nilai kebenaran  $\sim(\sim p)$  adalah sama dengan nilai kebenaran  $p$  sendiri. Hal yang sama akan terjadi juga jika  $p$  bernilai S. Hal ini akan mengakibatkan nilai kebenaran dari  $\sim(\sim p)$  akan bernilai S juga.

Dua pernyataan disebut ekuivalen (dengan notasi ' $\equiv$ ') jika kedua pernyataan tersebut mempunyai nilai kebenaran yang sama. Pada contoh di atas, didapatkan:  $p \equiv \sim(\sim p)$  karena baik  $p$  maupun  $\sim(\sim p)$  akan memiliki nilai kebenaran yang sama seperti ditunjukkan tabel kebenaran di bawah ini.

$p$	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
B	S	B
S	B	S

Beberapa contoh ekuivalensi yang sangat penting di antaranya adalah:

- $p \vee q \equiv q \vee p$ ;  $p \wedge q \equiv q \wedge p$  (Komutatif)
- $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ ;  $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$  (Asosiatif)
- $p \equiv \sim(\sim p)$ ;  $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ ;  $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ ;
- $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$  dan  $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$  (Kontraposisi)
- $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ;  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ; (Distributif)
- $p \vee S \equiv p$ ;  $p \vee B \equiv B$ ;  $p \wedge S \equiv S$ ;  $p \wedge B \equiv p$ .

h.  $p \wedge \sim p \equiv S$ ;  $p \vee \sim p \equiv B$ ; di mana B suatu tautologi dan S suatu Kontradiksi.

Untuk membuktikan ekuivalensi-ekuivalensi di atas dapat digunakan tabel kebenaran. Ekuivalensi di atas sangat penting dikuasai Bapak dan Ibu Guru karena dapat dipakai untuk menyederhanakan bentuk-bentuk pernyataan majemuk seperti di bawah ini.

$$\begin{aligned}
 \sim[\sim p \vee \sim(\sim q)] \wedge \sim(\sim q) &\equiv \sim(\sim p \vee q) \wedge q && \text{(Ekuivalensi c)} \\
 &\equiv (\sim(\sim p) \wedge \sim q) \wedge q && \text{(Ekuivalensi c)} \\
 &\equiv (p \wedge \sim q) \wedge q && \text{(Ekuivalensi c)} \\
 &\equiv p \wedge (\sim q \wedge q) && \text{(Ekuivalensi b)} \\
 &\equiv p \wedge S && \text{(Ekuivalensi h)} \\
 &\equiv S && \text{(Ekuivalensi g)}
 \end{aligned}$$

Contoh: Pernyataan  $(\sim p \wedge r) \Rightarrow (\sim r \Rightarrow q)$  ini termasuk tautologi, kontradiksi ataukah kontingensi?

Jawab

Cara 1

$$\begin{aligned}
 (\sim p \wedge r) \Rightarrow (\sim r \Rightarrow q) &\equiv \sim(\sim p \wedge r) \vee (\sim r \Rightarrow q) && \text{(Ekuivalensi d)} \\
 &\equiv \sim(\sim p \wedge r) \vee [\sim(\sim r) \vee q] && \text{(Ekuivalensi d)} \\
 &\equiv [\sim(\sim p) \vee \sim r] \vee [\sim(\sim r) \vee q] && \text{(Ekuivalensi c)} \\
 &\equiv p \vee \sim r \vee r \vee q && \text{(Ekuivalensi c)} \\
 &\equiv p \vee (\sim r \vee r) \vee q && \text{(Ekuivalensi b)} \\
 &\equiv p \vee B \vee q && \text{(Ekuivalensi h)} \\
 &\equiv B && \text{(Ekuivalensi g)}
 \end{aligned}$$

Karena pernyataan  $(\sim p \wedge r) \Rightarrow (\sim r \Rightarrow q)$  selalu bernilai benar maka pernyataan tersebut termasuk tautologi.

Cara 2

Dengan menggunakan tabel kebenaran.

p	q	r	$\sim p$	$\sim r$	$(\sim p \wedge r)$	$(\sim r \Rightarrow q)$	$(\sim p \wedge r) \Rightarrow (\sim r \Rightarrow q)$
B	B	B	S	S	S	B	B
B	B	S	S	B	S	B	B
B	S	B	S	S	S	B	B
B	S	S	S	B	S	S	B
S	B	B	B	S	B	B	B
S	B	S	B	B	S	B	B
S	S	B	B	S	B	B	B
S	S	S	B	B	S	S	B

Karena pernyataan  $(\sim p \wedge r) \Rightarrow (\sim r \Rightarrow q)$  selalu bernilai benar pada tabel kebenaran di atas, maka pernyataan tersebut termasuk tautologi.

## Latihan 2.1

1. Tentukan negasi dari pernyataan berikut:

- a. Andi Sose ganteng dan pintar.
  - b. Jika ia tidak belajar maka ia tidak akan diterima di ITB.
  - c. Fahmi disebut pintar jika dan hanya jika ia diterima di FK UGM.
2. Carilah nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan majemuk di bawah ini dengan menggunakan tabel kebenaran.
    - a.  $(p \Rightarrow q) \wedge \sim(p \Leftrightarrow \sim q)$
    - b.  $[p \Rightarrow (\sim q \vee r)] \wedge \sim[q \vee (p \Leftrightarrow r)]$
  3. Sederhanakanlah pernyataan-pernyataan majemuk di bawah ini dengan menggunakan ekuivalensi-ekuivalensi pada halaman 18.
    - a.  $[p \Rightarrow (\sim q)] \Rightarrow [\sim (p \wedge q)]$
    - b.  $[\sim(p \vee q) \Rightarrow r] \vee \sim(p \wedge q)$
    - c.  $p \wedge (\sim p \Rightarrow p) \wedge \sim p$
    - d.  $\sim[p \Rightarrow (q \vee r)] \wedge [\sim p \vee (q \vee r)] \vee p$

## Bab III

### Penarikan Kesimpulan

Di saat memecahkan suatu masalah ataupun mengembangkan ilmunya, para ilmuwan ataupun matematikawan sering dihadapkan dengan suatu proses penarikan kesimpulan dari berbagai data yang sudah dikumpulkannya. Proses berpikir yang terjadi di saat menurunkan ataupun menarik kesimpulan dari pernyataan-pernyataan yang diketahui benar atau dianggap benar itulah yang disebut dengan penalaran (*reasoning*). Jadi, penalaran adalah suatu proses penarikan kesimpulan dari pernyataan-pernyataan yang diketahui benar atau dianggap benar. Yang akan dibahas pada bagian ini adalah: argumen atau penarikan kesimpulan, argumen yang sah atau valid beserta bentuk-bentuk umum penarikan kesimpulan yang valid atau sah.

#### A. Penarikan Kesimpulan atau Argumen

Jika pernyataan atau proposisi dilambangkan dengan kalimat yang memiliki nilai benar saja atau salah saja, maka istilah sah atau tidak sah berkaitan dengan penalaran/reasoning ataupun argumen. Istilah penalaran atau reasoning dijelaskan oleh Copi (1978:5) sebagai berikut: "*Reasoning is a special kind of thinking in which inference takes place, in which conclusions are drawn from premises*". Dengan demikian, penalaran merupakan kegiatan, proses atau aktivitas berpikir untuk menarik suatu kesimpulan atau membuat suatu pernyataan baru berdasar pada beberapa pernyataan yang diketahui benar ataupun yang dianggap benar. Pernyataan yang diketahui atau dianggap benar yang menjadi dasar penarikan suatu kesimpulan inilah yang disebut dengan antesedens atau premis. Sedang hasilnya, suatu pernyataan baru yang merupakan kesimpulan disebut dengan konsekuensi atau konklusi.

Istilah lain yang sangat erat dengan dengan istilah penalaran adalah argumen. Giere (1984) menyatakan: "*An argument is a set of statements divided into two parts, the premises and the intended conclusion*" (h.32). Dengan memperhatikan dua definisi tadi, jelaslah bahwa ada kesamaan antara penalaran dan argumen. Beda kedua istilah menurut Soekardijo (1988) adalah, kalau penalaran itu aktivitas pikiran yang abstrak maka argumen ialah lambangnya yang berbentuk bahasa atau bentuk-bentuk lambang lainnya. Yang sering menjadi perhatian para ilmuwan maupun matematikawan adalah menunjukkan atau membuktikan bahwa jika p bernilai benar akan mengakibatkan q bernilai benar juga. Untuk keperluan itu, pernyataan majemuk implikasi dan ekuivalensi akan mengambil peranan yang sangat menentukan.

Sebagaimana dinyatakan tadi, argumen terdiri dari dua bagian, yaitu bagian premis dan bagian kesimpulan. Premis adalah pernyataan yang digunakan untuk mendapatkan suatu konklusi. Contoh bagan suatu argumen adalah sebagai berikut:

(Premis 1)  
(Premis 2)  
.  
(Premis n)  
-----  
Kesimpulan

Dikenal dua macam penarikan kesimpulan. Yang pertama adalah induksi atau penalaran induktif dan yang kedua adalah deduksi atau penalaran deduktif. Contoh induksi atau penalaran induktif adalah:

Amri pada suatu saat mati.  
 Bani pada suatu saat mati.  
 Caca pada suatu saat mati.  
 Dudi pada suatu saat mati.  
 Endi pada suatu saat mati.  
 Fafa pada suatu saat mati.  
 Jadi, jika ia manusia maka ia akan mati.  
 Dapat juga dinyatakan dengan semua manusia akan mati.

Contoh deduksi atau penalaran deduktif adalah:

Semua manusia akan mati.  
 Amri manusia.  
 Jadi, Amri pada suatu saat akan mati.

Namun yang akan dibicarakan pada paket ini adalah argumen, penarikan kesimpulan, ataupun penalaran deduktif saja. Perhatikan contoh dari penarikan kesimpulan deduktif ini:

Semua manusia akan mati	$p \Rightarrow q$
Amin manusia	$p$
-----	-----
Jadi Amin akan mati	$p$
Jika $x = -3$ maka $x^2 = 9$	$p \Rightarrow q$
$x^2 = 9$	$q$
-----	-----
Jadi $x = -3$	$p$

Dua contoh di atas dapat disebut sebagai argumen karena terdiri atas dua bagian, yaitu bagian premis dan bagian konklusi. Namun contoh itu dapat disebut juga sebagai penalaran karena pada dua contoh di atas terjadi penarikan kesimpulan dari premis yang ada. Penarikan suatu kesimpulan dari beberapa premis yang diketahui atau dianggap benar ini akan menjadi sangat penting. Ilmu Pengetahuan tidak akan pernah berkembang tanpa adanya penarikan kesimpulan ataupun pembuatan pernyataan yang baru.

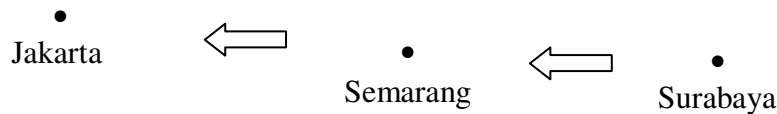
Pertanyaan yang mungkin muncul adalah, dari dua argumen itu, yang mana yang boleh dilakukan? Jawaban untuk pertanyaan ini merupakan bagian dari logika, ilmu yang mempelajari atau mengkaji cara berpikir yang valid, sah, atau absah. Ada beberapa penarikan kesimpulan yang sah, valid atau absah. Di antaranya yang akan dibicarakan di sini adalah modus ponens, modus tollens, dan silogisme. Kesimpulan akhir yang dapat dinyatakan di sini adalah jika nilai benar dan salah berkaitan dengan pernyataan maka sah/valid/absah atau tidak sah akan berkaitan dengan argumen atau berkaitan dengan penarikan suatu kesimpulan.

### **B. Sahih Tidaknya Penarikan Kesimpulan**

Perhatikan contoh penarikan kesimpulan ini:

- (1) Semarang terletak di sebelah barat Surabaya.
- (2) Jakarta terletak di sebelah barat Semarang.
- Jadi, Jakarta terletak di sebelah barat Surabaya.

Tidak ada yang istimewa pada penarikan kesimpulan di atas, semuanya sudah jelas. Apalagi bagi orang yang sering bepergian dan melewati ketiga kota tersebut. Pada proses pembelajaran di kelas, ketiga kota tersebut sebaiknya dimodifikasi sehingga sesuai dengan lingkungan mereka. Dengan cara seperti itu, diharapkan proses pembelajarannya akan lebih bermakna bagi para siswa. Berilah kesempatan kepada para siswa untuk berpikir dengan mengajukan pertanyaan ini: Jika kedua premis argumen tadi bernilai benar, apakah mungkin kesimpulannya akan bernilai salah? Jawabannya adalah tidak mungkin. Untuk meyakinkan mereka, dapat saja digunakan peta pulau Jawa atau diagram berikut:



Berdasar pada premis (1), dapat digambar suatu noktah yang mewakili Semarang yang terletak di sebelah kiri noktah yang mewakili Surabaya karena Semarang berada di sebelah barat Surabaya. Sampai di sini, diharapkan para siswa akan menerimanya dengan mudah. Begitu juga dari premis (2) akan didapat noktah yang mewakili Jakarta akan terletak di sebelah kiri noktah yang mewakili Semarang. Karena wakil dari Semarang berada di sebelah kiri wakil Surabaya dan wakil dari Jakarta berada di sebelah kiri wakil Semarang, maka dapatlah disimpulkan bahwa Jakarta berada di sebelah kiri dari Surabaya. Jadi Jakarta terletak di sebelah barat Surabaya harus merupakan suatu pernyataan yang benar.

Contoh di atas menunjukkan penarikan kesimpulan yang valid atau sahih sebagaimana dinyatakan Giere (84) berikut: *“Any argument in which the truth of the premises makes it impossible that the conclusion could be false is called a deductively valid argument”* (p.39). Yang artinya, setiap argumen di mana kebenaran dari premis-premisnya tidak memungkinkan bagi kesimpulannya untuk salah disebut dengan argumen yang sah atau valid. Contoh:

- (1) Rumah Amin terletak di sebelah barat rumah Akbar.
- (2) Rumah Akbar terletak di sebelah barat rumah Abdur

-----  
 Jadi, rumah Amin terletak di sebelah barat rumah Abdur

Tentunya para siswa dan Anda sendiri tidak akan mengetahui apakah pernyataan tersebut benar atau tidak. Mungkin juga Anda tidak akan mengenal dan tidak akan mengetahui apakah ketiga orang tersebut benar-benar memiliki rumah. Tetapi Anda dapat menyatakan bahwa kesimpulan tersebut haruslah bernilai benar jika premis-premisnya bernilai benar. Dengan kata lain, pada penarikan kesimpulan yang valid, tidaklah mungkin premis-premisnya bernilai benar namun kesimpulannya bernilai salah. Sebagaimana yang dinyatakan Giere tadi, penarikan kesimpulan seperti itulah yang merupakan suatu penarikan kesimpulan yang sahih atau valid. Contoh ini menunjukkan juga bahwa valid tidaknya suatu penarikan kesimpulan tidak harus mengetahui benar tidaknya premis-premis maupun kesimpulannya.

Giere (1984) mencontohkan juga bahwa dari suatu premis-premis yang bernilai salah akan dapat dihasilkan suatu kesimpulan yang bernilai salah maupun yang bernilai benar melalui suatu proses penarikan kesimpulan yang valid berikut ini.

- Babi adalah binatang bersayap. (Salah)
- 
- Semua binatang bersayap tidak dapat terbang. (Salah)
- 
- Jadi, babi tidak dapat terbang (Benar)

Bulan lebih besar daripada bumi.	(Salah)
Bumi lebih besar daripada matahari.	(Salah)
Jadi, bulan lebih besar daripada matahari	(Salah)

### C. Beberapa Penarikan Kesimpulan yang Sahih

Untuk mengetahui validitas suatu argumen deduktif adalah dengan membentuk kondisional atau implikasi di mana premis-premis dari argumen tersebut dijadikan sebagai antesedennya dan konklusi dari argumen tersebut dijadikan sebagai konsekuennya. Sebagai contoh, untuk mengetahui valid tidaknya argumen berikut:

$$\frac{\begin{array}{l} p \Rightarrow q \quad (\text{Premis 1}) \\ p \quad (\text{Premis 2}) \end{array}}{\text{Jadi } q \quad (\text{Kesimpulan})}$$

adalah dengan membentuk konjungsi dari premis 1 dan 2, yaitu  $(p \Rightarrow q) \wedge p$  dan setelah itu hasil konjungsi tersebut diimplikasikan dengan konklusi argumen yang ada sehingga menjadi:  $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

Bentuk terakhir ini harus dibuktikan lewat tabel kebenaran apakah termasuk tautologi atau tidak. Jika bentuk terakhir tadi merupakan tautologi maka argumen tadi valid. Jika tidak dihasilkan suatu tautologi maka argumen tadi tidak valid. Secara ringkas dapat disimpulkan: suatu argumen atau suatu penarikan kesimpulan akan sah, absah, atau valid jika konjungsi dari premis-premisnya diimplikasikan dengan kesimpulannya akan menghasilkan suatu tautologi.

Beberapa penarikan kesimpulan yang sah atau valid yang akan dibahas pada bagian ini di antaranya adalah *modus ponens*, *modus tolens*, dan *silogisme*.

#### 1. Modus Ponens

Bentuk Umum:

$$\frac{\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \end{array}}{\therefore q}$$

Untuk membuktikannya, dapat ditunjukkan bahwa  $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$  merupakan suatu tautologi lewat tabel kebenaran di bawah ini.

p	q	[(p ⇒ q) ∧ p] ⇒ q						
B	B	B	B	B	B	B	B	B
B	S	B	S	S	S	B	B	S
S	B	S	B	B	S	S	B	B
S	S	S	B	S	S	S	B	S
Langkah ke		1	2	1	3	1	4	1

Pada langkah terakhir (ke-4) terlihat nilai kebenarannya adalah benar semua (tautologi), sehingga modus ponens termasuk atau merupakan argumen yang sah. Contoh modus ponens:

- (1) Jika seseorang berada di Jakarta maka ia berada di pulau Jawa.  
Anita berada di Jakarta.  
Jadi, Anita berada di pulau Jawa.
- (2) Pada hari Senin di sekolah ada pelajaran logika.  
Tanggal 2 April 2001 adalah hari Senin.  
Jadi, pada tanggal 2 April 2001 ada pelajaran logika.
- (3) Jika suatu segitiga mempunyai 2 sisi yang sama panjang maka segitiga itu sama kaki.  
Pada segitiga ABC,  $AB = AC$ .  
Jadi, segitiga ABC sama kaki.

## 2. Modus Tollen

Bentuk:

$$\frac{p \Rightarrow q \quad \sim q}{\therefore \sim p}$$

Argumen di atas dapat dibuktikan sendiri seperti pada saat membuktikan modus ponens, yaitu dengan membuktikan implikasi  $[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim q)] \Rightarrow \sim p$  sebagai suatu tautologi. Contoh modus tolen:

- (1) Seorang vegetarian tidak makan daging dan hasil olahannya.  
Amin makan ayam goreng.  
Jadi, Amin bukan vegetarian.
- (2) Bilangan prima adalah bilangan yang faktornya adalah 1 dan dirinya sendiri.  
 $x$  mempunyai 3 faktor.  
Jadi,  $x$  bukan bilangan prima.
- (3) Grafik  $y = ax^2 + bx + c$  terletak di atas sumbu-X bila  $a > 0$  dan  $b^2 - 4ac < 0$   
 $y = -2x^2 + 4x - 5$   
Jadi, grafik  $y = -2x^2 + 4x - 5$  adalah parabola di bawah sumbu-X.

## 3. Silogisme

Bentuk:

$$\frac{p \Rightarrow q \quad q \Rightarrow r}{\therefore p \Rightarrow r}$$

Kesahihan argumen silogisme ini dapat dibuktikan sendiri seperti di atas. Contoh Silogisme:

- (1) Setiap hari Sabtu ayah tidak bekerja (libur).  
Ayah berkebun jika tidak bekerja.  
Jadi, setiap hari Sabtu ayah berkebun.
- (2) Jika  $x$  dan  $y$  adalah dua bilangan bulat berurutan maka yang satu genap dan yang satunya lagi ganjil.  
Jika salah satu bilangan genap dan yang satunya lagi ganjil maka jumlah kedua bilangan itu ganjil.  
Jadi, jika  $x$  dan  $y$  bilangan bulat berurutan maka jumlah kedua bilangan itu ganjil.

Catatan: Perlu diingatkan sekali lagi bahwa dalam penarikan kesimpulan, premis-premisnya diasumsikan atau dianggap benar dan argumennya harus valid. Berikut ini akan diberikan beberapa contoh soal tentang penarikan kesimpulan.

### Contoh 1

Perhatikan premis-premis ini.

Jika Anita mendapat A pada ujian akhir maka Anita mendapat A untuk mata kuliah itu.

(1) Jika Anita mendapat A untuk mata kuliah itu maka ia dinominasikan menerima beasiswa.

(2) Anita tidak dinominasikan menerima beasiswa.

Tariklah suatu kesimpulan dari tiga premis tersebut.

### Penyelesaian

Misal            p: Anita mendapat nilai A pada ujian akhir  
                  q: Anita mendapat nilai A untuk mata kuliah itu  
                  r: Anita dinominasikan mendapat beasiswa

Pernyataan-pernyataan di atas dapat diterjemahkan secara simbolik sebagai:

- (1)  $p \Rightarrow q$
- (2)  $q \Rightarrow r$
- (3)  $\sim r$

Dari premis (1) dan (2), dengan silogisme, akan diperoleh  $p \Rightarrow r$ . Jika dilanjutkan dengan premis (3) akan terjadi modus tolens seperti terlihat di bawah ini.

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow r \\ \sim r \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

Kesimpulannya, Anita tidak mendapat nilai A pada ujian akhir.

### Contoh 2

Seorang pecinta hewan memperhatikan tingkah laku hewan-hewan peliharaannya mendapatkan data berikut:

- 1) Tidak ada anak kucing yang suka ikan, yang tidak dapat diajari. Sebagai catatan, yang tidak dapat diajari adalah kucingnya dan bukan ikannya.
- 2) Tidak ada anak kucing tanpa ekor akan bermain dengan gorila.
- 3) Anak kucing yang mempunyai kumis selalu menyukai ikan.
- 4) Anak kucing yang tidak dapat diajari memiliki mata hijau.
- 5) Anak kucing yang memiliki ekor mempunyai kumis.

Kesimpulan apa yang dapat diperoleh dari pernyataan-pernyataan di atas?

Penyelesaian:

Misal            i: anak kucing suka ikan  
                  j: anak kucing dapat diajari  
                  e: anak kucing memiliki ekor  
                  g: anak kucing bermain dengan gorila  
                  k: anak kucing punya kumis

m: anak kucing punya mata hijau

Secara simbolik pernyataan di atas dapat dinyatakan sebagai berikut:

1. Jika ia anak kucing yang suka ikan maka ia dapat diajari ( $i \Rightarrow j$ )
2. Jika anak kucing tidak punya ekor maka ia tidak akan bermain dengan gorila ( $\sim e \Rightarrow \sim g$ )
3. Jika anak kucing mempunyai kumis maka ia akan menyukai ikan ( $k \Rightarrow i$ ).
4. Jika anak kucing dapat diajari, maka ia tidak mempunyai mata hijau ( $j \Rightarrow \sim m$ )
5. Jika anak kucing mempunyai ekor, maka ia mempunyai kumis ( $e \Rightarrow k$ ).

Pernyataan g dan e disebutkan sekali. Kita bisa memilih salah satu dari mereka. Jika dimulai dari g, susunan premis-premis adalah:

$$\begin{aligned} g &\Rightarrow e \\ e &\Rightarrow k \\ k &\Rightarrow i \\ i &\Rightarrow j \\ j &\Rightarrow \sim m \end{aligned}$$

Kesimpulan,  $g \Rightarrow \sim m$ , atau:

Jika anak kucing bermain dengan gorila maka ia tidak mempunyai mata hijau.

Contoh 3:

Apakah penarikan kesimpulan berikut ini valid?

$$\begin{aligned} &\text{Jika } x = 3 \text{ maka } x^2 = 9 \\ &x^2 = 9 \\ &\text{Jadi, } x = 3 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

Bentuk simbolik penarikan kesimpulan di atas adalah:

$$\begin{aligned} p &\Rightarrow q \\ \frac{q}{\therefore p} \end{aligned}$$

Bentuk ini bukan modus ponens, modus tolens maupun silogisme. Untuk menentukan valid atau tidaknya, dibuat tabel kebenaran  $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$  berikut.

p	q	[(p	⇒	q)	∧	q]	⇒	p
B	B	B	B	B	B	B	B	B
B	S	B	S	S	S	S	B	B
S	B	S	B	B	B	B	S	S
S	S	S	B	S	S	S	B	S
Langkah		1	2	1	3	1	4	1

Nilai kebenaran  $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$  yang diperlihatkan dalam langkah 4 ternyata bukan tautologi. Dengan demikian bentuk penarikan kesimpulan di atas tidak valid.

Argumen yang tidak valid lainnya berbentuk:

$$\frac{p \Rightarrow q \quad \sim p}{\sim q}$$

Contoh 4

Pada suatu perusahaan, tiga orang wanita, yaitu Lili, Mimi dan Nini masing-masing bekerja di bagian keuangan, kasir dan di bagian pembukuan. Tidak ada satupun dari mereka yang bekerja di dua bagian. Diketahui juga bahwa:

- a. Jika Nini bekerja sebagai kasir maka Mimi bekerja di bagian pembukuan.
- b. Jika Nini bekerja di bagian pembukuan maka Mimi bekerja di bagian keuangan.
- c. Jika Mimi tidak bekerja sebagai kasir maka Lili bekerja di bagian pembukuan.
- d. Jika Lili bekerja di bagian keuangan maka Nini bekerja di bagian pembukuan.

Tentukan pekerjaan masing-masing orang tersebut.

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan masalah yang berkait dengan logika ini, Bapak/Ibu Guru serta para siswa harus berani untuk mencoba-coba memilih/menentukan yang merupakan salah satu strategi atau siasat memecahkan masalah. Langkah-langkahnya adalah:

- 1) Nini bisa bekerja sebagai kasir, pembukuan atau keuangan.
- 2) Misalkan Nini bekerja sebagai kasir maka menurut pernyataan a) Mimi harus bekerja di bagian pembukuan. Hal ini berarti bahwa Mimi tidak bekerja sebagai kasir dan menurut pernyataan c) maka Lili harus bekerja di bagian pembukuan. Sampai di sini didapatkan suatu kontradiksi, yaitu Mimi dan Lili sama-sama bekerja di bagian pembukuan. Jadi pemisalan bahwa Nini bekerja sebagai kasir tidak dapat diterima karena menghasilkan suatu kontradiksi. Kesimpulannya, Nini bukanlah seorang kasir.
- 3) Misalkan Nini bekerja di bagian pembukuan, maka menurut pernyataan b) Mimi harus bekerja di bagian keuangan. Hal ini berarti bahwa Mimi tidak bekerja sebagai kasir dan menurut pernyataan c) maka Lili harus bekerja di bagian pembukuan. Sampai di sini didapatkan suatu kontradiksi, yaitu Nini dan Lili sama-sama bekerja di bagian pembukuan. Jadi pemisalan bahwa Nini bekerja di bagian pembukuan tidak dapat diterima karena menghasilkan suatu kontradiksi. Kesimpulannya, Nini tidak bekerja di bagian pembukuan..
- 4) Karena Nini bukanlah seorang kasir dan ia juga tidak bekerja di bagian pembukuan maka kemungkinan yang bisa diterima adalah Nini bekerja di bagian keuangan.
- 5) Bagaimana dengan Mimi dan Lili ? Sampai di sini ada dua kemungkinan yaitu:
  - Nini bekerja di bagian keuangan, Lili pembukuan dan Mimi kasir (A).
  - Nini bekerja di bagian keuangan, Lili kasir dan Mimi pembukuan (B).
- 6) Sekarang, perhatikan kemungkinan (B) di atas yang menyatakan bahwa Mimi bekerja di bagian pembukuan. Hal ini berarti bahwa Mimi tidak bekerja sebagai kasir dan menurut pernyataan c) maka Lili bekerja di bagian pembukuan. Sampai di sini terjadi kontradiksi lagi sehingga kemungkinan (B) harus ditolak. Kemungkinan yang masih tersisa yang langsung

menjadi jawaban masalah di atas adalah: Nini bekerja di bagian keuangan, Lili pembukuan dan Mimi kasir.

### Latihan 3.1

Untuk soal nomor 1 sampai 10, buatlah suatu kesimpulan dari pernyataan-pernyataan berikut.

1. (1) Suatu fungsi disebut fungsi bijektif jika fungsi itu fungsi injektif (satu-satu) dan fungsi onto.  
(2) Fungsi  $f$  bukan fungsi bijektif.
2. (1) Jika petani merabuk dua kali sebulan maka ia akan panen raya.  
(2) Jika rabuk harganya mahal maka petani akan menangis.  
(3) Jika orang tidak merabuk dua kali sebulan maka petani tidak menangis.
3. (1) Suatu lingkaran dapat digambar melalui tiga titik A, B, dan C jika ketiga titik tersebut tidak segaris.  
(2) Suatu lingkaran tidak dapat digambar.
4. (1) Nilai sinus  $\alpha$  akan positif jika  $\alpha$  di kuadran I atau II.  
(2)  $\alpha$  di kuadran II.
5. (1) Jika  $A \subset B$  maka  $A \cap B = A$ .  
(2)  $A \cap B \neq A$ .
6. (1) Jika  $y = ax^2 + bx + c$  mempunyai nilai  $a$  negatif maka grafiknya merupakan parabola membuka ke bawah.  
(2) Parabola memiliki nilai maksimum jika membuka ke bawah.
7. (1) Buah-buahan yang belum masak rasanya masam.  
(2) Semua salak pondoh rasanya tidak masam.  
(3) Tak ada buah yang ditanam di keteduhan dapat masak.
8. (1) Setiap orang waras dapat berpikir.  
(2) Tak ada orang gila yang menjadi jaksa.  
(3) Tak seorangpun saudaramu yang dapat berpikir.
9. (1) Bayi adalah makhluk yang tidak (belum) bisa berpikir.  
(2) Penjahat adalah orang yang tidak bisa dihormati.  
(3) Semua yang bukan penjahat adalah orang yang bisa berpikir.
10. (1) Semua penjahat adalah orang nekat.  
(2) Semua orang yang tidak korupsi adalah orang terhormat.  
(3) Jika orang tidak melanggar aturan maka ia tidak nekat.  
(4) Semua orang yang melanggar aturan adalah orang-orang tidak terhormat.

Untuk soal nomor 11 sampai 20, tentukan apakah penarikan kesimpulan di bawah ini valid? Berikan penjelasannya.

11. Jika besar sudut  $\alpha$  negatif maka cosinus  $\alpha$  positif.  
Sudut  $A = 60^\circ$   
Jadi, cosinus  $A$  negatif
12. Jika  $n$  bilangan ganjil maka  $n^2$  bilangan ganjil.  
Jika  $n^2$  bilangan ganjil maka  $n^2 + 1$  bilangan genap.  
 $n^2 + 1$  bilangan ganjil.  
Jadi,  $n$  bilangan genap.

13. Udara panas jika cuaca mendung.  
Jika udara panas maka kita selalu haus.  
Jadi, jika cuaca mendung kita selalu haus.
14. Untuk setiap  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|x| \geq 0$ .  
 $(y + 5) \in \mathbb{R}$ .  
Jadi,  $|(y + 5)| \geq 0$ .
15. Tidak ada siswa yang menyenangi pelajaran matematika.  
Siswa yang menyenangi matematika nilai bahasa Inggrisnya bagus.  
Jadi, Bahasa Inggris siswa jelek.
16. Jika hujan lebat turun maka akan terjadi banjir.  
Sekarang tidak banjir.  
Jadi, hujan tidak lebat.
17. Wanita cantik adalah artis film.  
Wanita yang pintar tidak cantik.  
Jadi, artis film tidak pintar.
18. Jika ia tidak sakit maka ia masuk sekolah.  
Jika ia tidak lelah maka ia masuk sekolah.  
Ia sakit dan tidak lelah.  
Jadi, ia masuk sekolah.
19. Siswa yang membolos adalah siswa yang bodoh.  
Siswa yang pintar disayangi guru.  
Jadi, siswa membolos tidak disayangi guru.
20. Barang yang kualitasnya bagus harganya mahal.  
Barang yang harganya mahal tidak banyak orang yang memilih.  
Jadi, barang yang dimiliki banyak orang kualitasnya jelek.

Untuk soal nomor, 21 sampai 25, selesaikan masalah yang berkaitan dengan logika ini.

21. Diandaikan bahwa politisi selalu berbohong dan ulama selalu berkata benar. Tiga orang sedang berbincang-bincang. Mereka adalah A, B dan C yang menjadi politisi atau ulama namun tidak ada yang merangkap sebagai ulama sekaligus politisi. Perbincangan mereka adalah sebagai berikut
  - A: "Kami bertiga ulama."
  - B: "Si A berkata benar."
  - C: "Tidak. Si A berbohong."
 Yang mana dari ketiga orang tersebut yang politisi dan mana yang ulama.  
Petunjuk: Perhatikan pernyataan B dan C.
22. Diandaikan bahwa politisi selalu berbohong dan ulama selalu jujur.  
P, Q, dan R sedang berbincang-bincang. Mereka ada yang menjadi politisi atau ulama namun tidak ada yang merangkap sebagai ulama sekaligus politisi.
  - P: "Kami bertiga adalah politisi"
  - Q: "Tidak. Ada satu orang di antara P, Q atau R yang ulama".
  - R tidak berkomentar.
 Manakah dari ketiga orang tersebut yang ulama dan mana yang politisi.  
Petunjuk: Perhatikan pernyataan P. Apakah mungkin dia ulama?
23. Tiga orang siswa SMUN Nusa, bernama Tomo, Dirjo dan Harso sedang berjalan menuju sekolahnya. Tomo, siswa terpandai di sekolahnya selalu berkata benar. Dirjo kadang-

kadang berkata benar dan kadang-kadang berbohong. Sedangkan Harso, siswa ternakal di kelasnya selalu berbohong. Satu dari tiga siswa itu berbaju putih, satu lagi berbaju hijau dan yang satu lagi berbaju biru.

Siswa yang berbaju putih menyatakan bahwa siswa yang berbaju hijau adalah Harso.

Siswa yang berbaju hijau menyatakan bahwa dirinya adalah Dirjo.

Siswa yang berbaju biru menyatakan bahwa siswa yang berbaju hijau adalah Tomo.

Tentukan warna baju yang dipakai Tomo, Dirjo dan Harso.

Petunjuk: Tentukan lebih dahulu si Tomo karena ia tidak pernah berbohong. Mungkinkah Tomo berbaju hijau? Mungkinkah Tomo berbaju biru?

24. Setelah menyelesaikan perlombaan tenis, lima peserta melaporkan hasilnya di mana setiap orang membuat dua pernyataan berikut.

Alim: "Dodi nomor dua."; "Saya nomor tiga."

Budi: "Saya juaranya."; "Cici nomor dua."

Cici : "Saya nomor tiga."; "Budi di urutan terakhir."

Dudi: "Saya berada di urutan ke-dua."; "Edna di urutan keempat."

Edna: "Saya hanya ada di nomor empat."; "Alim yang menjadi juara."

Tentukan urutan-urutan juaranya jika setiap pemain di atas membuat satu pernyataan yang benar dan satu pernyataan lainnya salah.

Petunjuk: Lengkapi tabel yang menunjukkan pernyataan setiap orang di atas. Tabel di bawah menunjukkan bahwa Alim menyatakan bahwa Dodi berada di peringkat 2 dan dirinya sendiri berada di peringkat 3. Lalu analisis tabel tersebut.

	Alim	Budi	Cici	Dodi	Edna
Alim	3				
Budi					
Cici					
Dodi	2				
Edna					

25. Tiga orang sahabat, yaitu A, B dan C yang baru saja menyaksikan pertandingan PERSEBAYA melawan PERSIB bertemu temannya, si D. Si D lalu menanyakan hasil pertandingan tersebut. Jawaban ketiga sahabatnya adalah:

A: "Persebaya yang menang. Persib kebobolan lebih dahulu."

B: "Saya tidak pernah berkata benar. Persebaya yang kebobolan lebih dahulu."

C: "Pernyataan B salah. Pertandingan tersebut berakhir seri."

Setelah mengetahui hasil pertandingan yang sebenarnya, tahulah si D bahwa kedua pernyataan dari A, B maupun C sama-sama benar atau sama-sama salah. Tentukan hasil pertandingan yang sebenarnya. Jelaskan jalan pikiran Anda secara runtut dan jelas.

Petunjuk: Perhatikan pernyataan B. Mungkinkah pernyataan B bernilai benar?

## Bab IV

### Bukti Langsung Dan Bukti Tak Langsung

Matematika dikenal sebagai mata pelajaran yang bersifat deduktif aksiomatis. Hal ini menunjukkan bahwa suatu pengetahuan baru merupakan akibat dari pernyataan lain yang telah diterima kebenarannya seperti postulat atau aksioma, maupun teorema lain yang telah dibuktikan kebenarannya seperti dalil atau rumus. Sebagai akibatnya, peran bukti menjadi sangat penting dalam matematika.

Bukti (*proof*) adalah argumen dari suatu premis ke suatu kesimpulan yang dapat meyakinkan orang lain agar dapat menerima kesimpulan baru tersebut. Karenanya, pembuktian dalam matematika harus didasarkan pada dua hal yang sangat penting. Yang pertama pembuktian itu harus didasarkan pada pernyataan serta definisi yang jelas. Yang kedua, pembuktian tersebut harus didasarkan pada prosedur penarikan kesimpulan yang valid. Dikenal dua prosedur pembuktian, yaitu bukti langsung (*direct proof*) dan bukti tak langsung (*indirect proof*).

#### A. Pembuktian Langsung

Sekali lagi, pembuktian langsung ini dilakukan untuk meyakinkan orang lain tentang kebenaran suatu pernyataan. Pembuktian langsung biasanya menggunakan silogisma berbentuk  $p \Rightarrow q$ ,  $q \Rightarrow r$ ,  $r \Rightarrow s$ , ... ,  $y \Rightarrow z$  sehingga disimpulkan  $p \Rightarrow z$  seperti yang harus dibuktikan.

Contoh:

1. Buktikan bahwa jika  $a + c = b + c$ , maka  $a = b$

Bukti :

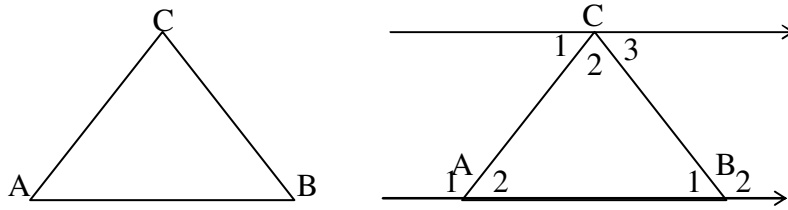
$a + c$	$= b + c$	[diketahui]
$(a + c) + (-c)$	$= (b + c) + (-c)$	[menambah kedua ruas dengan $-c$ ]
$[a + \{c + (-c)\}]$	$= [b + \{c + (-c)\}]$	[assosiatif]
$a + 0$	$= b + 0$	[invers]
$a$	$= b$	[identitas penjumlahan]

Pembuktian langsung di atas menunjukkan bahwa dimulai dengan  $a + c = b + c$  dan dengan langkah yang runtut, sesuai dengan aksioma yang ada, pada akhirnya akan didapat  $a = b$ . Hal tersebut menunjukkan juga bahwa dari suatu pernyataan dapat dibuktikan pernyataan lain yang jika pernyataan awalnya ( $a + c = b + c$ ) bernilai benar akan didapat pernyataan lain ( $a = b$ ) yang tidak mungkin bernilai salah. Teorema atau dalil tersebut dapat digunakan untuk membentuk pernyataan, rumus, teorema atau dalil lainnya.

2. Buktikan bahwa jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah  $180^\circ$ .

Bukti:

Misalkan segitiga ABC-nya adalah seperti gambar dibawah ini



Jika ditarik garis  $l \parallel AB$ , akan didapat gambar seperti di kanan atas. Dengan menggunakan teorema atau dalil tentang dua garis sejajar yang dipotong garis lain, akan didapat:

$$\angle A_2 = \angle C_1 \text{ (dalam berseberangan)}$$

$$\angle B_1 = \angle C_3 \text{ (dalam berseberangan)}$$

Karena jumlah besar sudut-sudut segitiga ABC adalah

$$\begin{aligned} & \angle A_2 + \angle B_1 + \angle C_2 \\ &= \angle C_1 + \angle C_3 + \angle C_2 = 180^\circ \end{aligned}$$

Besar sudut  $180^\circ$  ini didapat dari definisi bahwa sudut lurus besarnya  $180^\circ$ . Dengan demikian terbukti bahwa jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah  $180^\circ$ . Pembuktian ini dilakukan dengan runtut, dimulai dari segitiga ABC, lalu dengan menggunakan dalil ataupun teorema yang sudah dibuktikan kebenarannya serta definisi yang sudah ditentukan; dan diakhiri dengan kesimpulan yang menunjukkan tentang jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga seperti yang diharapkan.

## B. Pembuktian Tak Langsung

Jika Anda diminta untuk membuktikan secara deduktif seperti yang sering digunakan di matematika bahwa bendera putih dengan bulatan merah bukanlah bendera Indonesia, apa yang akan Anda lakukan? Sekali lagi, bagaimana cara Anda membuktikannya secara deduktif?

Didalam kehidupan nyata sehari-hari pemanfaatan pembuktian tak langsung (*indirect proof*) sering digunakan meskipun tidak disadari sebagai pembuktian tak langsung. Sebagai contoh ketika Anda sedang asyik membaca lalu tiba-tiba saja listrik mati. Jika Anda ingin menentukan sumber matinya listrik tersebut, apa yang akan Anda lakukan? Yang terpikir pertama kali adalah, penyebab matinya listrik tersebut terletak di gardu dengan alasan: “jika listrik di gardu mati maka listrik dirumah dan listrik tetangga akan mati juga” namun dengan melihat listrik tetangga-tetangga yang masih hidup semua Anda akan menyimpulkan bahwa penyebab matinya listrik tersebut adalah bukan di gardu listriknya. Jadi sumber matinya listrik terletak di rumah sendiri.

Menurut Cooney, Davis, dan Henderson (1975:313), pembuktian tak langsung adalah strategi yang sangat hebat karena penalaran tersebut dapat digunakan untuk membuktikan kebenaran hampir semua pernyataan. Ketiganya (1975:313) menyatakan: “A special form of indirect proof is *reductio ad absurdum*”. Borrowski dan Borwein (1989:289) menyatakan bahwa : “*Indirect proof is a common mathematical term for reductio ad absurdum*”. Bentuk *reductio ad absordum* ini dikenal juga sebagai penalaran melalui kontradiksi. Untuk membuktikan

kebenarannya pernyataan  $p$ , maka dimisalkan negasi atau ingkaran tersebut yang terjadi yaitu  $\sim p$ . Lalu dibuktikan bahwa  $\sim p$  ini mengarah kepada suatu kontradiksi. Karena  $\sim p$  mengarah kesuatu keadaan yang kontradiksi, maka pemisalan  $\sim p$  dianggap salah. Jadi, kesimpulan bahwa  $p$  benar seperti yang akan dibuktikan.

Contoh-contoh pembuktian tak langsung.

1. Buktikan  $\emptyset \subset A$

Bukti:

Misalkan  $\emptyset \not\subset A$ . Langkah ini memisalkan ingkaran atau negasi yang akan dibuktikan, sehingga disebut pembuktian tak langsung. Apa yang dapat Anda katakan tentang  $\emptyset \subset A$ ? Pernyataan  $\emptyset \not\subset A$ , mengandung arti bahwa ada anggota himpunan kosong  $\emptyset$  yang tidak menjadi anggota himpunan  $A$ . Suatu keadaan yang tidak mungkin terjadi, karena  $\emptyset$  tidak mempunyai anggota. Dengan keadaan yang kontradiksi ini, dapat disimpulkan bahwa pemisalan tadi bernilai salah. Artinya pernyataan  $\emptyset \not\subset A$  bernilai salah, yang benar adalah  $\emptyset \subset A$ .

2. Buktikan  $\sqrt{2}$  bukan bilangan rasional

Bukti:

Misalkan  $\sqrt{2}$  adalah bilangan rasional. Dengan demikian  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , sebagai akibatnya baik  $p$  maupun  $q$  merupakan bilangan asli dan keduanya tidak memiliki faktor persekutuan selain 1.

Dengan mengkuadratkan  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  didapat

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

Karena  $2q^2$  adalah bilangan genap, maka  $p^2$  nya juga genap. Karena  $p$  telah dinyatakan sebagai bilangan asli maka didapat  $p$  sebagai bilangan asli genap. Dengan demikian,  $p$  memiliki faktor 2.

Jika sekarang dimisalkan  $p = 2r \Rightarrow (2r)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4r^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2r^2$

Dengan argumen yang sama dengan yang diatas tadi dapatlah disimpulkan bahwa  $q$  adalah bilangan asli genap, yang memiliki faktor 2 juga seperti  $p$ . Suatu keadaan yang tidak masuk di akal sehat kita. Suatu keadaan yang kontradiksi.  $p$  dan  $q$  pada tahap awal pembuktian dinyatakan tidak memiliki faktor persekutuan selain 1, namun pada akhir pembuktian  $p$  dan  $q$  dinyatakan sama-sama memiliki faktor persekutuan 2. Keadaan yang tidak masuk akal ini pada akhirnya menunjukkan tentang salahnya pemisalan  $\sqrt{2}$  sebagai bilangan rasional. Kesimpulannya  $\sqrt{2}$  bukan bilangan rasional atau  $\sqrt{2}$  merupakan bilangan irrasional.

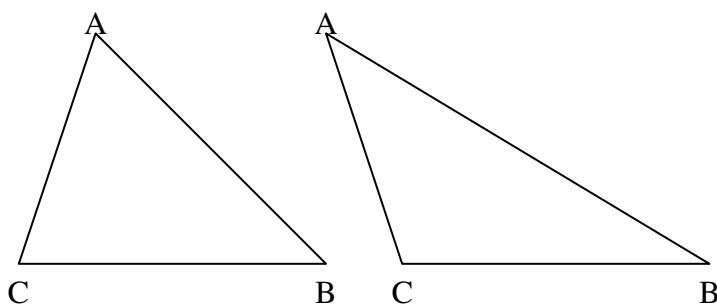
Dengan contoh di atas, jelaslah kiranya bahwa pembuktian tak langsung (terbalik) adalah pembuktian dengan pemisalan ingkaran pernyataan yang akan dibuktikan tadi sebagai hal yang benar, namun dengan langkah-langkah yang logis, pemisalan ini mengarah ke suatu

keadaan yang kontradiksi, sehingga pemisalan tersebut dinyatakan sebagai hal yang salah. Artinya negasi dari negasi pernyataan tersebut sebagai hal yang benar. Kesimpulan akhirnya, pernyataan yang akan dibuktikan tersebut merupakan pernyataan yang benar.

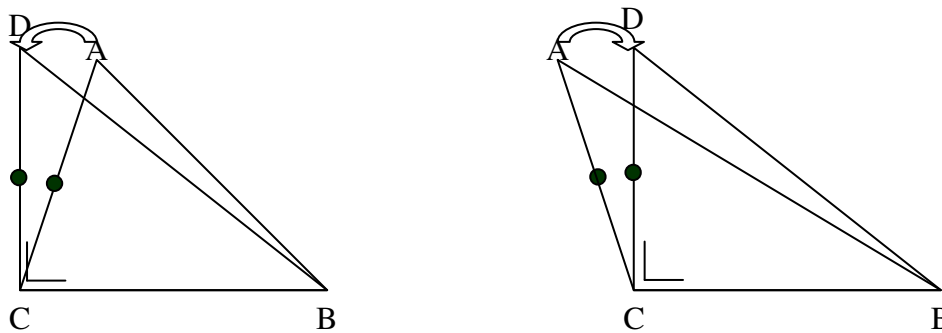
3. Dengan mengandaikan bahwa siswa sudah tahu kebenaran teorema Pythagoras; buktikan kebenaran kebalikan teorema Pythagoras, yaitu jika  $a$ ,  $b$ , dan  $c$  merupakan ukuran sisi-sisi suatu segitiga  $ABC$  yang memenuhi  $BC^2 + AC^2 = AB^2$ , maka segitiga  $ABC$  tersebut adalah segitiga siku-siku di  $C$ .

Bukti:

Dimisalkan segitiga  $ABC$  tersebut bukan segitiga siku-siku di  $C$ . Dengan demikian,  $\angle C < 90^\circ$  atau  $\angle C > 90^\circ$  seperti terlihat pada dua gambar di bawah ini.



Tarik segmen garis  $CD = CA$  dan  $CD \perp CB$  seperti terlihat di bawah ini



Berdasar terorema Pythagoras akan didapat:  $BD^2 = BC^2 + CD^2$ . Padahal diketahui bahwa  $BC^2 + AC^2 = AB^2$ . Dengan demikian  $BD = AB$ .

Dengan demikian didapat dua segitiga yang samakaki, yaitu  $\triangle ACD$  dan  $\triangle ABD$ . Akibatnya:

$$\begin{aligned} \angle CDA &= \angle CAD \dots 1) \\ \angle BDA &= \angle DAB \dots 2) \end{aligned}$$

Pernyataan 1) dan 2) saling bertentangan karena jika dilihat pada gambar sebelah kiri, yaitu  $\angle CDA = \angle CAD$  pada pernyataan 1) akan mengakibatkan  $\angle BDA < \angle CDA$  sedangkan  $\angle DAB > \angle CAD$ , sehingga tidaklah mungkin  $\angle BDA = \angle DAB$  seperti dinyatakan pada pernyataan 2).

Kesimpulannya, pemisalan bahwa segitiga ABC bukan segitiga siku-siku di C adalah salah, sehingga didapat segitiga ABC merupakan segitiga siku-siku di C.

#### Latihan 4.1

1. Buktikan dengan cara langsung:
  - a. Jika  $a$  dan  $b$  adalah dua bilangan rasional, maka  $a + b$  merupakan bilangan rasional.
  - b. Jika  $a$  dan  $b$  adalah dua bilangan real, maka  $a^2 + b^2 \geq 2ab$
  - c. Jika  $a$  adalah suatu bilangan bulat yang habis dibagi 4, maka  $a$  merupakan selisih dari dua bilangan kuadrat sempurna.
  
2. Buktikan dengan cara tidak langsung bahwa:
  - a.  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  - b. Tidak ada pasangan bilangan  $(x, y)$  dengan  $x$  dan  $y$  merupakan bilangan asli yang memenuhi  $a^2 - b^2 = 10$
  - c. Garis-garis  $p$ ,  $q$ , dan  $r$  merupakan tiga garis yang berbeda;  $p//q$ ; dan  $q//r$ . Buktikan bahwa  $p//r$ .
  
3. Buktikan dengan cara langsung dan tidak langsung bahwa:  
Jika  $ab = 0$  maka paling tidak salah satu dari  $a$  atau  $b$  bernilai 0
  
4. Buktikan:
  - a. Pada segitiga ABC siku-siku di A, maka diameter lingkaran dalam segitiga ABC =  $b + c - a$
  - b. Jika dua garis  $a$  dan  $b$  sejajar dan dipotong garis  $p$  maka sudut-sudup sehadapnya sama besar.
  - c. Besar sudut pusat adalah dua kali besar sudut keliling
  - d. Jika pada segitiga ABC,  $\angle A = 90^\circ$  dan  $\angle C = 30^\circ$  maka  $A = 2C$
  - e. Banyaknya bilangan prima tidak terbatas.
  
5. Dimisalkan bahwa hogog selalu berbohong dan guru berkata benar.
  - A. "Kita bertiga hogog"
  - B. "Diantara tiga orang ini, hanya seorang saja yang guru"
  - C. Diam saja tidak berkomentar.Dari ketiga orang tersebut, tentukan yang menjadi hogog dan yang menjadi guru.

## Bab V Induksi Matematika

### A. Pendahuluan

Ada dua macam penalaran yang dikenal, yaitu deduksi atau penalaran deduktif serta induksi atau penalaran induktif. Penalaran induktif atau induksi dapat diartikan sebagai penarikan kesimpulan berbentuk umum (generalisasi) dari beberapa kasus khusus. Sebagai contoh, jika dari lima kasus yang ditemui bahwa hasil penjumlahan dua bilangan ganjil dan genap adalah bilangan ganjil, lalu orang tersebut menyimpulkan secara umum bahwa jika bilangan ganjil dan bilangan genap akan selalu menghasilkan bilangan ganjil, maka orang tersebut dikatakan telah bernalar secara induktif. Artinya, ia telah menarik kesimpulan dari lima kasus yang ditemuinya untuk membentuk suatu pernyataan umum tentang seluruh mangga arummanis yang jika berkulit hijau akan masam rasanya.

Di dalam kehidupan nyata, hasil penarikan kesimpulan tersebut pada umumnya dikategorikan sebagai pernyataan yang bernilai benar. Namun di dalam pemikiran ahli logika dan matematika, jika seseorang telah memverifikasi suatu pernyataan umum dari beberapa kasus khusus, pertanyaan yang dapat diajukan adalah bagaimana meyakinkan diri kita sendiri dan juga orang lain bahwa pernyataan tersebut memang bernilai benar.

Contoh tentang hal ini ditunjukkan oleh seorang matematikawan Rusia *Christian Goldbach* pada tahun 1742. Perhatikan beberapa kasus khusus ini.

$4 = 2 + 2$	$12 = 7 + 5$
$6 = 3 + 3$	$14 = 7 + 7$
$8 = 5 + 3$	$16 = 11 + 5$
$10 = 5 + 5$	$18 = 13 + 5$

Tabel seperti itu dapat ditunjukkan kepada para siswa di saat membahas materi ini, lalu ajukan beberapa alternatif pertanyaan seperti ini.

- Apa yang menarik dari tabel di atas yang menunjukkan delapan kesamaan sebagai kasus khususnya?
- Apa yang dapat Anda katakan tentang ruas kiri ke delapan kesamaan tersebut?
- Apa yang dapat Anda katakan tentang ruas kanannya?
- Dapatkah Anda membentuk suatu kesamaan seperti di atas untuk bilangan lainnya, seperti 20, 30, 60, atau 100?
- Kesimpulan umum apa yang dapat Anda nyatakan sekarang?
- Bagaimana meyakinkan diri Anda dan orang lain bahwa kesimpulan tersebut memang benar?
- Dapatkah Anda memberi satu contoh adanya bilangan genap yang dapat menyangkal kesimpulan yang Anda susun tadi memang tidak benar?

Tabel di atas merupakan beberapa kesamaan yang mengacu kepada suatu kesimpulan umum bahwa setiap bilangan asli genap selain 2 akan merupakan jumlah dua bilangan prima. Pada saat ini, tidak ada satupun bilangan genap (selain 2) yang tidak dapat dinyatakan sebagai jumlah dua bilangan prima. Namun, tidak ada orang yang dapat menunjukkan tentang adanya bilangan genap (selain 2) yang tidak dapat dinyatakan sebagai jumlah dua buah bilangan prima. Karenanya kesimpulan atau pernyataan bahwa:

“Setiap bilangan genap (selain 2) dapat dinyatakan sebagai jumlah dua buah bilangan prima”.

masih disebut sebagai dugaan (*conjecture*) dan dikenal saat ini sebagai *Goldbach Conjecture*. Artinya, pernyataan tersebut masih belum dapat dibuktikan secara deduktif kebenarannya. Di dalam matematika, suatu pernyataan yang belum dibuktikan kebenarannya disebut dengan *conjecture* (dugaan). Pertanyaan yang masih mengganjal para matematikawan adalah apakah memang benar pernyataan tersebut akan selalu benar untuk setiap bilangan genap (selain 2)?

Jika ada orang yang dapat menunjukkan akan adanya bilangan genap (selain 2) yang tidak dapat ditunjukkan sebagai jumlah dua bilangan prima, maka gugurlah dugaan GOLBACH tersebut. Namun jika ada orang yang membuktikan kebenaran dugaan tersebut secara deduktif, maka berubahlah dugaan tersebut menjadi suatu teorema. Selama kedua hal tersebut tidak terjadi, selama itu pulalah dugaan tersebut akan tetap menjadi dugaan yang akan menunggu pemikiran matematikawan untuk dibuktikan kebenarannya atau dibuktikan kesalahannya.

## B. Prinsip Induksi Matematika

Menurut Abrahamson dan Gray (1971 : 117) induksi matematika muncul di dalam berbagai karya matematikawan besar dunia, dimulai sekitar akhir abad enam belas. Tetapi, matematikawan besar Perancis, yaitu Blaise Pascal (1623 – 1662) yang pertama kali memberikan penjelasan ini secara lebih jelas dan terinci. Pascal melakukan hal ini pada tahun 1654, di dalam suatu pengkajian yang kini dikenal sebagai segitiga Pascal sedangkan istilah induksi matematika digunakan pertama kali oleh matematikawan Inggris Augustus de Morgan pada 1838.

Abrahamson dan Gray (1971 : 116) menyatakan hal berikut: *“The technique of mathematical induction, in spite of its name, is a deductive – not an inductive–method of reasoning”*. Hal ini menunjukkan bahwa, tidak seperti istilahnya, induksi matematika adalah langkah deduktif dan bukan langkah induktif. Secara umum, induksi matematika digunakan untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan yang berkait dengan bilangan asli.

Perhatikan contoh berikut. Contoh ini dapat juga digunakan untuk membahas induksi matematika ini.

$$\begin{aligned}1 &= 1 \times 1 \\1 + 3 &= 2 \times 2 \\1 + 3 + 5 &= 3 \times 3 \\1 + 3 + 5 + 7 &= 4 \times 4\end{aligned}$$

Pertanyaannya:

- 1) Apakah benar  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ ,  $n \geq 1$ ?
- 2) Bagaimana membuktikannya?

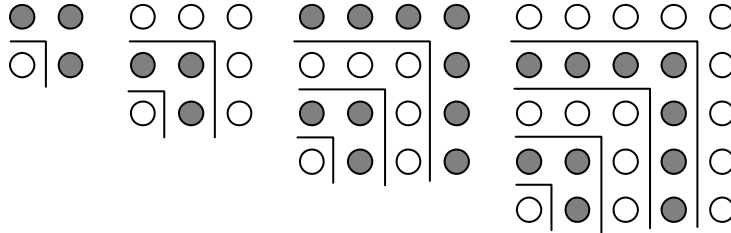


Diagram di atas sering ditemukan pada buku-buku SD maupun SLTP untuk meyakinkan para siswa bahwa penjumlahan  $n$  buah bilangan ganjil pertama sama dengan bilangan persegi ke- $n$ .

Meskipun dari diagram di atas terlihat jelas bahwa

$$\begin{aligned}
 1 &= 1 \times 1 \\
 1 + 3 &= 2 \times 2 \\
 1 + 3 + 5 &= 3 \times 3 \\
 1 + 3 + 5 + 7 &= 4 \times 4 \\
 1 + 3 + 5 + 7 + 9 &= 5 \times 5
 \end{aligned}$$

Namun pertanyaannya, apakah hal tersebut sudah membuktikan secara formal bahwa penjumlahan  $n$  buah bilangan ganjil pertama sama dengan bilangan persegi ke- $n$ ?

Diagram di atas menunjukkan bahwa penambahan bilangan ganjil ke-2, ke-3, ke-4, ... akan menjadikannya suatu bilangan persegi. Hal tersebut hanya menunjukkan adanya penalaran induktif atau induksi untuk membuat pernyataan umum. Karena adanya sikap ke hati-hatian para matematikawan, pernyataan tersebut masih dikategorikan sebagai suatu dugaan (*conjecture*) sebelum dibuktikan kebenarannya melalui induksi matematika. Sekali lagi induksi matematika merupakan pembuktian dengan penalaran deduktif (deduksi) yaitu:

Jika  $P(n)$  merupakan pernyataan yang didefinisikan untuk setiap bilangan asli  $n \geq p$ . Jika dapat ditunjukkan  $P(p)$  bernilai benar, dan dapat dibuktikan bahwa  $P(k + 1)$  bernilai benar jika  $P(k)$  bernilai benar, maka  $P(n)$  adalah benar untuk semua  $n \geq k$ .

Secara skematis, langkah-langkah pembuktian menggunakan induksi matematika adalah sebagai berikut.

1. Ditunjukkan  $P(p)$  benar [Langkah I]
2.  $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$  [Langkah Induktif]  
 Untuk setiap  $n$ ,  $P(n)$  [Kesimpulan]

### C. Contoh Induksi Matematika

#### Contoh 1.

Buktikan dengan induksi matematika bahwa  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ .

#### Bukti

Yang akan dibuktikan adalah pernyataan atau rumus yang berkait dengan bilangan asli  $n$ , yaitu tentang jumlah  $n$  bilangan asli pertama akan bernilai sama dengan bilangan persegi ke- $n$ . Sebagaimana dinyatakan di atas, langkah induksi matematika adalah sebagai berikut.

- 1) Harus ditunjukkan bahwa pernyataan benar untuk  $n = p$ , di sini akan diambil  $p = 1$ . Untuk  $n = 1$ , akan didapat.

$$\begin{aligned} \text{Ruas kiri} &= 2n - 1 \\ &= 2 \times 1 - 1 \\ &= 1 \\ \text{Ruas kanan} &= n^2 \\ &= 1 \times 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Karena ruas kiri dan kanan sama maka sudah dapat ditunjukkan bahwa  $P(n)$  bernilai benar untuk  $n = 1$ . Dengan demikian  $P(1)$  bernilai benar.

- 2) Langkah kedua ini dikenal dengan langkah induktif.

Misalkan  $P(n)$  benar untuk  $n = k$ , sehingga didapat:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) = k^2.$$

Yang harus dibuktikan sekarang adalah pernyataan benar untuk  $n = k + 1$ , yaitu:

$$\begin{aligned} \text{Ruas kiri} &= 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) \\ &= k^2 + (2k + 1) \\ &= (k + 1)^2 \\ \text{Ruas kanan} &= (k + 1)^2. \end{aligned}$$

Karena ruas kiri dan kanan sama maka sudah dapat dibuktikan bahwa, jika dimisalkan rumus atau pernyataan benar untuk  $n = k$  maka benar pula untuk  $n = k + 1$ . Dengan demikian,  $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$ .

- 3) Kesimpulannya, rumus benar untuk setiap  $n$  bilangan asli  $k$ .

Pembuktian secara induksi matematika ini menunjukkan bahwa pada langkah pertama rumus ditunjukkan benar untuk  $n = 1$ . Pada langkah kedua dibuktikan bahwa rumus benar untuk  $n = k + 1$  berdasar pemisalan bahwa rumus benar untuk  $n = k$ .

Berdasar dua langkah tersebut dapat disimpulkan bahwa rumus tersebut benar untuk setiap bilangan asli  $n$ . Sebagian siswa mengalami kesulitan untuk memahami pembuktian dengan menggunakan induksi matematika ini. Diantaranya adalah:

- Mengapa rumus harus dimisalkan benar untuk  $n = k$  lalu dibuktikan rumus benar untuk  $n = k + 1$ ?
- langkahnya seperti berputar-putar.

Perhatikan langkah pertama, yang menunjukkan bahwa rumus tersebut benar untuk  $n = 1$ . Pada langkah kedua, jika rumus benar untuk  $n = 1$  (lihat langkah 1) maka rumus akan benar juga untuk  $n = 2$ . Akibat selanjutnya rumus akan benar untuk  $n = 3, n = 4, n = 5$  dan seterusnya untuk setiap bilangan asli  $n$ . Jadi, langkah kedua jangan dilihat sepotong-potong, tetapi harus dikaitkan dengan langkah pertama, sehingga tidak muncul pemikiran siswa bahwa pembuktian ini seperti berputar-putar.

### Contoh 2

Buktikan bahwa  $n^3 + 5n$  habis dibagi 6,  $n \geq 1$ .

#### Bukti:

Rumus yang akan dibuktikan adalah  $P(n)$  yang berbunyi: " $n^3 + 5n$  habis dibagi 6".

- 1) Tunjukkan bahwa  $P(1)$  adalah benar.  $P(1) = 1 + 5 = 6$  yang memang benar habis dibagi 6. Jadi  $P(1)$  adalah benar.
- 2) Dimisalkan  $P(k)$  benar, jadi  $k^3 + 5k$  habis dibagi 6. Harus dibuktikan  $P(k + 1)$  bernilai benar juga. Untuk  $n = k + 1$ .

$$\begin{aligned} (k + 1)^3 + 5(k + 1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (5k + 5) = (k^3 + 5k) + (3k^2 + 3k + 6) \\ &= \underbrace{(k^3 + 5k)}_I + \underbrace{3k(k + 1)}_{II} + \underbrace{6}_{III} \end{aligned}$$

Bentuk I, II, dan III habis dibagi 6.

- 3) Dengan demikian rumus benar untuk setiap bilangan asli  $n$ .

### **Latihan 5.1**

1. Buktikan benar atau salahnya pernyataan atau rumus ini:

"Jika  $a_1 = 11$  dan  $a_{n+1} = a_n + 2n$  untuk setiap  $n \geq 1$ , maka  $a_n$  adalah bilangan prima untuk setiap bilangan asli  $n$ ".

2. Buktikan bahwa

a)  $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = n(n + 1)$

b)  $7 + 10 + 13 + 16 + \dots + \{7 + 3(n - 1)\} = \frac{1}{2} n[14 + 3(n - 1)]$

c)  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n + 1)^2$

d)  $3^{3n} + 2^{n+2}$  habis dibagi 5

e)  $2^{4n+3} + 3^{3n+1}$  habis dibagi 11

f)  $a^{4n} - b^{4n}$  habis dibagi  $(a^2 + b^2)$ .

3. Buktikan bahwa:

a)  $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

b)  $1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$  untuk  $r \neq 1$ .

c)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

d)  $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3} n(4n^2 - 1)$

e)  $\frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + \frac{3^2}{5.7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

4. Suatu bidang datar memuat  $n$  buah garis lurus. Setiap dua garis tidak pernah sejajar dan setiap tiga titik tidak pernah segaris. Buktikan bahwa banyaknya daerah yang terbentuk oleh  $n$  buah garis tersebut adalah  $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ .

## **Bab VI**

### **Penutup**

Logika, penalaran, maupun argumentasi sangatlah penting diketahui para siswa. Alasannya, pengetahuan tentang hal itu sering digunakan di dalam kehidupan nyata sehari-hari, dapat digunakan di dalam mata pelajaran matematika sendiri maupun mata pelajaran lainnya. Perlu rasanya untuk mengingatkan para guru bahwa tujuan umum pendidikan matematika pada jenjang pendidikan menengah umum adalah memberi tekanan pada penataan nalar dasar dan pembentukan sikap siswa serta juga memberi tekanan pada keterampilan dalam penerapan matematika dan pemecahan masalah matematika.

Isi paket ini tidak hanya menekankan pada penghafalan rumus atau teorema semata-mata, namun sudah berusaha untuk memberi kemudahan bagi para guru dalam proses pembelajarannya di kelas. Sebagian masalah yang berkaitan dengan logika, telah penulis masukkan sebagai soal-soal latihan. Penyelesaian masalah tersebut membutuhkan kerja keras dan keuletan Bapak dan Ibu Guru serta para siswa. Di samping soal-soal yang dapat digunakan sebagai latihan, modul ini dilengkapi juga dengan contoh-contoh dan petunjuk serta kunci jawabannya. Dengan kunci jawaban ini, diharapkan bapak dan ibu guru dapat memperoleh alternatif penyelesaiannya. Namun tidak tertutup kemungkinan, alternatif jawaban ini akan berbeda dengan jawaban bapak dan ibu guru. Jika ada jawaban yang berbeda, tentunya ada tiga kemungkinan yang terjadi, yaitu salah satu dari jawaban tersebut benar sedangkan jawaban yang satunya lagi salah; atau kedua jawaban tersebut dua-duanya salah. Untuk itu, jika jawaban bapak atau ibu guru berbeda dengan alternatif yang penulis tulis, maka mohon agar tiga kemungkinan mengenai jawaban tersebut perlu diperhitungkan dengan cermat. Artinya, jangan terlalu cepat menyalahkan salah satu jawaban. Mohon kiranya dicermati lagi jawaban-jawaban yang berbeda tersebut.

Pada akhirnya, mudah-mudahan paket ini dapat memberi masukan kepada Bapak dan Ibu Guru sehingga akan bermunculan ide-ide segar dan baru yang berkaitan dengan penarikan kesimpulan yang menggunakan silogisme, modus ponens, dan modus tollens; pembuktian langsung dan tidak langsung; serta pembuktian dengan induksi matematika. Mudah-mudahan juga akan muncul pemecah masalah yang tangguh dan penemu yang hebat dari bumi kita ini. Namun sekali lagi, jika para pemakai paket ini mengalami kesulitan ataupun memiliki saran untuk penyempurnaan paket ini, sudilah kiranya menghubungi penulis sendiri atau ke PPPG Matematika, Kotak Pos 31 YKBS, Yogyakarta. Sebelumnya disampaikan terima kasih.

## Daftar Pustaka

- Abrahamson, D; Gray, M.C. (1971). *The Art of Algebra*. Adelaide: Rigby Limited.
- Borowski, E.J.; Borwein, J.M. (1989). *Dictionary of Mathematics*. London: Collins
- Cooney, T.J., Davis, E.J., Henderson, K.B. (1975). *Dynamics of Teaching Secondary School Mathematics*. Boston : Houghton Mifflin Company.
- Copi, I.M. (1978) *Introduction to Logic*. New York: Macmillan.
- Depdiknas (2003). *Kurikulum 2004. Standar Kompetensi Mata Pelajaran Matematika Sekolah Menengah Pertama dan Madrasah Aliyah*. Jakarta: Depdiknas
- Giere, R. N. (1984). *Understanding Scientific Reasoning (2<sup>nd</sup> Edition)*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Soekardijo, R.G. (1988). *Logika Dasar, Tradisionil, Simbolik dan Induktif*. Jakarta:: Gramedia.