TAHAPAN DAN STRATEGI MEMECAHKAN MASALAH MATEMATIKA

(Sumardyono, M.Pd.)

Tahapan Pemecahan Masalah Matematika

Seringkali kita melihat siswa mengabaikan tahap-tahap penting dalam memecahkan masalah. Oleh karena itu, kita sendiri (guru) seharusnya mengetahui dan memahami tahap-tahap penting pemecahan masalah. Polya dalam bukunya, *Mathematical Discovery* menyatakan: "*The teacher should [...] show his students how to solve problems – but if he does not know, how can he show them?*". (Gardiner, 1987:vii).

Ada empat tahap pokok atau penting dalam memecahkan masalah yang sudah diterima luas, dan ini bersumber dari buku George Polya tahun 1945 berjudul "How to Solve It".

Keempat langkah tersebut adalah:

a. **Memahami soal/masalah - selengkap mungkin.**

Untuk dapat melakukan tahap 1 dengan baik, maka perlu latihan untuk memahami masalah baik berupa soal cerita maupun soal non-cerita, terutama dalam hal:

1). apa saja pertanyaannya, dapatkah pertanyaannya disederhanakan,

2). apa saja data yang dipunyai dari soal/masalah, pilih data-data yang relevan,

3). hubungan-hubungan apa dari data-data yang ada.

b. **Memilih rencana penyelesaian** – dari beberapa alternatif yang mungkin.

Untuk dapat melakukan tahap 2 dengan baik, maka perlu keterampilan dan pemahaman tentang berbagai strategi pemecahan masalah (ini akan di bahas lebih lanjut pada bagian tersendiri).

c. **Menerapkan rencana tadi** – dengan tepat, cermat dan benar.

Untuk dapat melakukan tahap 3 dengan baik, maka perlu dilatih mengenai:

1). keterampilan berhitung,

2). keterampilan memanipulasi aljabar,

3). membuat penjelasan (*explanation*) dan argumentasi (*reasoning*).

d. **Memeriksa jawaban** – apakah sudah benar, lengkap, jelas dan argumentatif (beralasan).

Untuk dapat melakukan tahap 4 dengan baik, maka perlu latihan mengenai:

1). memeriksa penyelesaian/jawaban (mengetes atau mengujicoba jawaban),

2). memeriksa apakah jawaban yang diperolah masuk akal,

3). memeriksa pekerjaan, adakah yang perhitungan atau analisis yang salah,

4). memeriksa pekerjaan, adakah yang kurang lengkap atau kurang jelas.

Siswa seringkali terjebak pada tahap 3 saja, sering melupakan tahap 4 dan mengabaikan tahap 1 dan tahap 2.

Berbagai Strategi Pemecahan Masalah

Seringkali kita (guru maupun siswa) terjebak pada model penyelesaian matematis-simbolik, bahkan hanya memikirkan penerapan rumus. Kita kadang lupa bahwa ada banyak strategi atau pendekatan atau model penyelesaian lain yang berguna dan kadang lebih baik.

Ada banyak strategi penyelesaian masalah dalam matematika, mulai dari yang algoritmik (semisal penggunaan rumus) hingga yang heuristik (semisal dengan bantuan gambar). Kita perlu mengenal dan memahami bermacam strategi penyelesaian tersebut. Hal ini menjadi bekal terpenting bagi kita agar dapat membimbing siswa mengembangkan kemampuan memecahkan masalah.

Berikut ini beberapa strategi yang penting dalam penyelesaian masalah matematika. Tiap strategi diberi contoh yang sesuai yang dibandingkan dengan cara penyelesaian tradisional. Selain itu perlu dipahami bahwa bisa jadi beberapa strategi berikut digunakan secara simultan dalam penyelesaian suatu masalah matematika.

a. Lukis sebuah gambar atau diagram (*make a picture or a diagram*)

Umumnya strategi ini diperlukan untuk mendapatkan gambaran yang jelas suatu masalah (terutama masalah geometri), juga untuk mendapatkan ide cara penyelesaian masalah. Contoh berikut menunjukkan strategi melukis gambar sebagai strategi yang *gamblang* (cepat dan tepat) untuk memperoleh penyelesaian.

Contoh.

Pandang sistem persamaan di bawah ini.

$$x^2 - y^2 = 0$$
$$(x - a)^2 + y^2 = 1$$

berapa nilai a agar sistem tersebut memiliki 0, 1, 2, 3, 4, atau 5 buah penyelesaian yang berbeda?

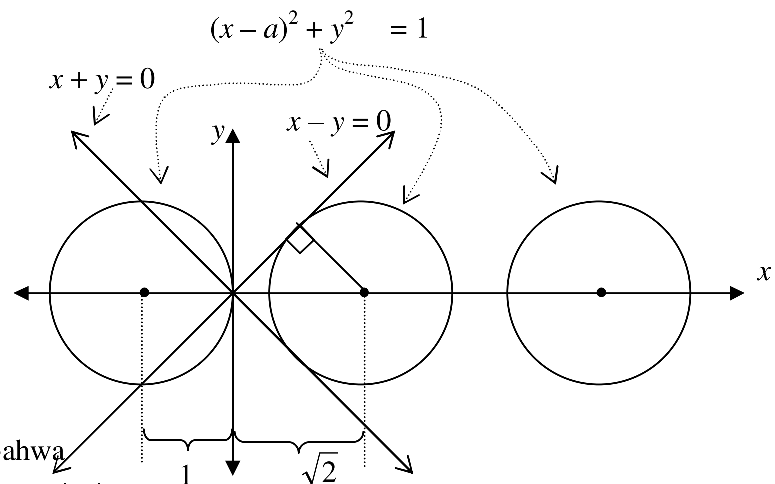
Rutin:

Cara tradisional biasanya dengan mensubstitusi persamaan pertama ke persamaan kedua. Lalu menyelesaikannya untuk mendapatkan nilai a.

Perhitungan atau manipulasi aljabar tersebut cukup panjang dan membutuhkan kehati-hatian terhadap variasi jawaban.

Menggunakan gambar/diagram:

Sangat berguna bila kita melukis kurva kedua persamaan di atas. Kita dapat berpikir sebuah lingkaran "menggelinding" sepanjang sumbu x (karena nilai yang bervariasi yaitu a pada sumbu x).



Jelas dari gambar, bahwa

Ada 3 penyelesaian bila $|a| = 1$

Ada 2 penyelesaian bila $|a| = \sqrt{2}$

Tidak ada penyelesaian bila $|a| > \sqrt{2}$

Ada 4 penyelesaian untuk a yang lain (yaitu $0 \le |a| < 1$ atau $1 < a < \sqrt{2}$).

Dan jelas, tidak ada kondisi a yang menghasilkan banyak penyelesaian yang lain, termasuk 1 atau 5 penyelesaian.

b. Temukan pola (*find a pattern*)

Bila kita dapat melihat sebuah pola pada sebuah masalah maka jangan abaikan. Gunakan pola tersebut untuk memperoleh penyelesaian masalah tersebut.

Contoh.

Temukan rumus yang menyatakan banyak himpunan bagian dari S bila himpunan S memiliki n buah elemen yang berbeda.

Rutin:

Mungkin tidak ada prosedur rutin (bagi siswa SMA) yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah ini.

Menemukan dan menggunakan pola:

Kita dapat memulai dengan beberapa harga n lalu mencoba menemukan sebuah pola. Berikut ini apa yang terjadi bila n = 0, 1, 2, 3 elemen.

n	**Elemen**	**Himpunan bagian**	**Banyak himpunan bagian**
0	Tidak ada	$\varnothing$	1
1	a	$\varnothing$, $\{a\}$	2
2	a, b	$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$	4
3	a, b, c	$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$ $\{c\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$	8

Pada tabel di atas, kita mendapatkan sebuah pola 1, 2, 4, 8, ... yang mengarahkan kita pada bentuk 2^n. Dengan melihat pola ini kita selanjutnya dapat mencoba penalaran yang ke arah penalaran deduktif.

Salah satu penalaran lanjut yang dapat ditemukan sebagai berikut:

Untuk n = 3 maka kita menambah himpunan bagian baru dari n = 2 dengan cara menambah elemen c pada semua himpunan bagian dari n = 2 (perhatikan baris kesatu dan baris kedua pada tabel untuk n = 3).

Sehingga banyak himpunan bagian untuk $n = k + 1$ dapat diperoleh melalui hubungan (rekursif) dengan banyak himpunan bagian untuk $n = k$. Selanjutnya hal ini dapat dibuktikan secara deduktif melalui induksi matematika.

Cara lain yang mengarah ke pembuktian deduktif sebagai berikut:

Misal untuk $n = 4$ kita dapat menyusun himpunan bagian berdasarkan banyak elemen tiap himpunan bagian.

Banyak elemen	**Himpunan bagian**	**Banyak himpunan bagian**
0	$\varnothing$	1
1	$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\},$	4
2	$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$	6
3	$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$	4
4	$\{a, b, c, d\},$	1

Ternyata kita melihat ada pola baru yang mengingatkan kita pada koefisien ekspansi binomial atau segitiga Pascal. Oleh karena itu, banyak himpunan bagian S adalah banyak himpunan bagian dengan k elemen untuk $k = 0$ hingga $k = n$. Sedang banyak himpunan bagian dengan k elemen adalah kombinasi mengambil k elemen dari n buah elemen yaitu $\binom{n}{k}$. Bila ditulis secara matematis, sebagai berikut:

Banyak himpunan bagian $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

(hasil terakhir ini berdasarkan contoh pada bagian 3 di atas).

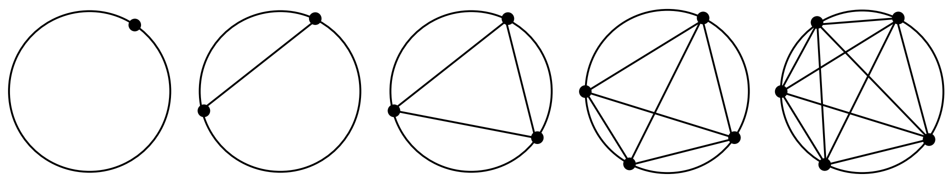
Catatan:

Kita hanya dapat menggunakan strategi ini hanya bila pola yang diperoleh benar-benar dapat dipertanggungjawabkan atau benar-benar diyakini berlaku umum. Seperti yang telah ditunjukkan, pola yang diperoleh kadang hanya berupa dugaan (dengan cara induktif) sehingga perlu dilanjutkan dengan pembuktian deduktif.

Di bawah ini sebuah contoh penggunaan pola yang malah menyesatkan.

Contoh.

Berapa banyak maksimum daerah dalam lingkaran yang dapat dibentuk untuk setiap n buah titik berbeda pada lingkaran?



Dari gambar di atas, kelihatan ada pola: 1, 2, 4, 8, 16, ... , 2^n.

Namun sesungguhnya ini salah, karena suku berikutnya 31 bukan 32. Cobalah periksa bila Anda penasaran.

c. Dugalah sebuah jawaban lalu memeriksanya (*guess and check* atau *trial and error*)

Strategi ini mungkin merupakan strategi yang paling remeh dan dapat dilakukan semua orang. Namun strategi ini dapat membuka mata kita pada penyelesaian yang menyeluruh, yang mungkin sangat sukar bila ditempuh dengan cara formal atau tradisional. Perlu pula kita camkan bahwa strategi coba-coba dalam matematika memiliki landasan penalaran, bukan asal coba. Strategi ini dapat dibedakan menjadi dua: sistematis dan inferensial. *Systematic trial* adalah mencoba semua kemungkinan (ini baik bila memungkinkan atau bila cacah kemungkinannya sedikit), sedang *inferensial trial* adalah mencoba dengan memilah-milah yang paling relevan berdasarkan konsep atau aturan tertentu.

Contoh berikut ini mungkin lebih cocok untuk SMP, namun tidak sedikit siswa SMA yang kesulitan menyelesaikannya. Selain itu dengan contoh ini kita dapat membandingkan strategi yang rutin/tradisional dengan strategi *guess and check*.

Contoh.

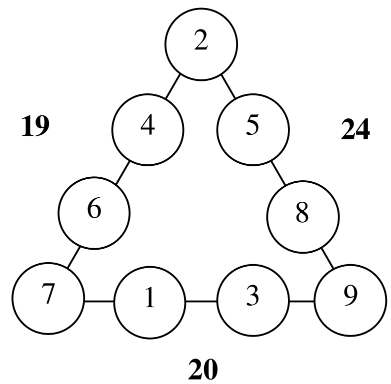
Susunlah angka 1 hingga 9 pada susunan segitiga di bawah ini sedemikian hingga jumlah angka untuk tiap sisi sama besar.

Rutin:

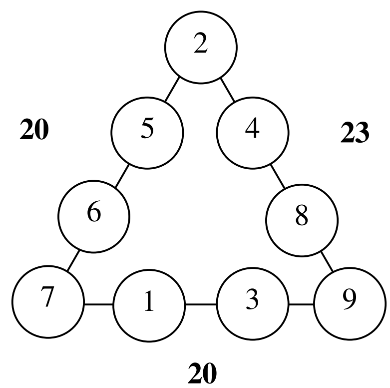
Mungkin secara tradisional, kita menggunakan notasi aljabar. Namun dapat kita bayangkan, betapa sulitnya menerapkan metode aljabar ini.

***Guess and Check*:**

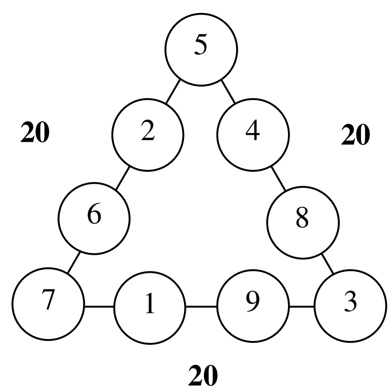
Susunlah secara sederhana kesembilan angka pada susunan segitiga. Mungkin susunan pertama kita seperti gambar di samping.



Setelah dugaan pertama, kita memperoleh jumlah yang berbeda-beda. Misalkan kita menginginkan jumlah 20 (bila ini memang mungkin). Kita dapat menukar 4 dan 5.



Jumlah 23 dapatkah dikurangi menjadi 20, dengan menukar letak beberapa angka?
Bila diperhatikan ini dapat kita lakukan dengan menukar 9 dan 3 dan 2 dan 5.



Perhatikan, bahwa hampir semua masalah matematika dapat menggunakan strategi coba-coba, paling tidak untuk mendapatkan arah untuk menyelesaikan masalah. Posamentier & Stepelman (1999:109) menegaskan: "*No matter how clever your strategy for solving a problem, you may still have to resort to a "trial and error"* *scheme as part of a solution".* Contoh yang berkaitan dengan penggunaan pola (*pattern*), umumnya membutuhkan dugaan-dugaan.

Satu lagi yang perlu diingat bahwa *guess and check* dapat dipandang secara lebih umum. Dugalah (*guess*) cara penyelesaian, lalu terapkan/periksalah (*check*)! Jadi yang perlu diduga buka saja jawaban, tetapi apa yang dapat kita lakukan untuk menyelesaian masalah.

d. Lakukan analisis mulai dari jawaban yang dikehendaki (*working backward*)

Banyak manipulasi aljabar juga masalah lain matematika yang sukar dikerjakan dengan arah ke depan (yaitu memulai dari data menuju ke hasil), namun begitu mudah diselesaikan setelah kita mencoba bergerak dari belakang (mulai dari hasil menuju data).

Contoh.

Jika jumlah dua bilangan adalah 12 dan hasil kalinya 4, temukan jumlah kebalikan kedua bilangan tersebut!

Rutin:

Misal x = bilangan pertama, dan y = bilangan kedua.

Maka $x + y = 12$ dan $xy = 4$.

Dengan substitusi diperoleh: $x\,(12 - x) = 4 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 4 = 0$.

Dengan rumus persamaan kuadrat, kita peroleh $x_1 = 6 + 4\sqrt{2}$ dan $x_2 = 6 - 4\sqrt{2}$.

Lalu dengan substitusi, dapat kita peroleh $y_1 = 6 - 4\sqrt{2}$ dan $y_2 = 6 + 4\sqrt{2}$

sehingga,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6+4\sqrt{2}} + \frac{1}{6-4\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} + \frac{3+2\sqrt{2}}{2} = 3.$$

Strategi "bergerak dari belakang (*working backward*)":

Mulai dari $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Bentuk tujuan ini dapat disederhanakan menjadi: $\frac{x+y}{xy}$.

Nah, sekarang terbaca, karena diketahui $x + y = 12$ dan $xy = 4$ maka

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{12}{4}=3.$$

Terlihat bahwa strategi “bergerak dari belakang” ini lebih cepat dan sederhana/efisien.

e. Gunakan masalah yang lebih sederhana (*use a simpler problem*)

Suatu masalah kadang lebih mudah diselesaikan bila kita membuatnya menjadi lebih sederhana. Cara ini dapat ditempuh dengan menyederhakan bentuk atau variabel.

Contoh.

Buktikan bahwa untuk setiap a, b, c, d bilangan real antara 0 dan 1, berlaku hubungan: $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) > 1-a-b-c-d$.

Rutin:

Umumnya kita terjebak dengan menganalisis ketaksamaan di atas, namun analisis ini cenderung panjang dan mungkin melelahkan.

Menggunakan masalah serupa yang lebih sederhana:

Pandang $(1-a)(1-b) > 1-a-b$.

Ini mudah dibuktikan, karena $(1-a)(1-b) = 1-a-b+ab > 1-a-b$.

Kemudian kalikan kedua ruas dengan $(1-c)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}(1-a)(1-b)(1-c) &> (1-a-b)(1-c)\\ &= 1-a-b-c+ab+bc\\ &> 1-a-b-c\end{aligned}$$

sehingga $(1-a)(1-b)(1-c) > 1-a-b-c$.

Cara serupa diterapkan kembali dengan mengalikan $(1-d)$ pada kedua ruas, untuk memperoleh ketaksamaan yang hendak dibuktikan.

f. Gunakan konteks yang lebih khusus atau kasus (*use a case problem*)

Hampir mirip dengan strategi *use a simpler problem*, strategi ini menggunakan contoh atau kasus masalah untuk mendapatkan ide penyelesaian yang menyeluruh. Hal ini dapat ditempuh dengan mensubstitusi nilai pada variabel atau mengaplikasi variabel pada kejadian khusus.

Contoh.

Temukan jumlah seluruh koefisien dari ekspansi binomial: $(x + y)^8$.

Rutin:

Umumnya mulai dengan mengekspansi binomial di atas. Mungkin dengan susah payah (perlu ketelitian), kita sampai pada hasil berikut:

$$(x+y)^8 = \binom{8}{0}x^8 + \binom{8}{1}x^7y + \binom{8}{2}x^6y^2 + \binom{8}{3}x^5y^3 + \binom{8}{4}x^4y^4 + \binom{8}{5}x^3y^5 + \binom{8}{6}x^2y^6 + \binom{8}{7}xy^7 + \binom{8}{8}y^8.$$

Sehingga, jumlah koefisiennya $= \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8}$

$= 1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1$

$= 256$.

Menggunakan masalah kasus:

Misalkan $x = 1$ dan $y = 1$, maka jumlah koefisien ekspansi binomial $(x + y)^8$ sama dengan $(1 + 1)^8 = 2^8 = 256$. Perhatikan, bahwa dengan mensubstitusi 1 untuk x maupun y maka kita sesungguhnya hanya menghitung jumlah koefisien ekspansi binomial tersebut.

g. Temukan masalah yang serupa atau analog, menyelesaikannya, lalu membandingkannya dengan soal semula (*use a similar problems*)

Contoh.

Berapa jumlah dari deret n suku dari $7 + 77 + 777 + 7777 + ...$, dengan suku ke-$k$ adalah bilangan k angka yang setiap angkanya adalah 7.

Rutin:

Umumnya dilakukan dengan mencari bentuk penjumlahan beberapa suku untuk menemukan apakah ada pola yang terlihat. Namun akan segera terlihat, bahwa strategi ini tidak cocok.

Menggunakan masalah yang mirip/analog:

Pandang deret berikut hingga suku ke-n .

$$9 + 99 + 999 + ... = (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + ...$$
$$= (10 + 100 + 1000 + ...) - (1 + 1 + 1 + ...)$$
$$= \frac{10^{n+1} - 10}{9} - n$$

Oleh karena $7 = \frac{7}{9}.9$ maka

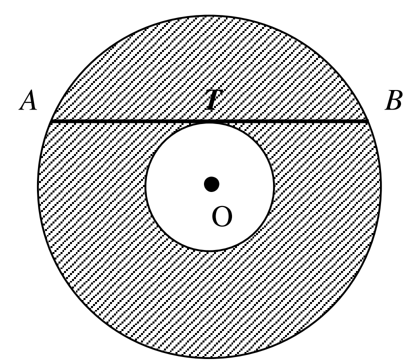
$$7 + 77 + 777 + ... = \frac{7}{9} . \left(\frac{10^{n+1} - 10}{9} - n \right) = \frac{7}{81}\left(10^{n+1} - 9n - 10\right)$$

h. Gunakan kasus yang ekstrim (*considering extreme cases*)

Strategi ini patut untuk dicoba pada setiap masalah. Penyelesaian yang diperoleh lewat strategi ini begitu elegan (sederhana dan tuntas).

Contoh.

Perhatikan gambar. Dua lingkaran konsentris membentuk "cincin". Ruas garis AB adalah tali busur lingkaran besar yang menyinggung lingkaran kecil. Jika AB = 8, hitunglah luas daerah "cincin" (yang berarsir)!

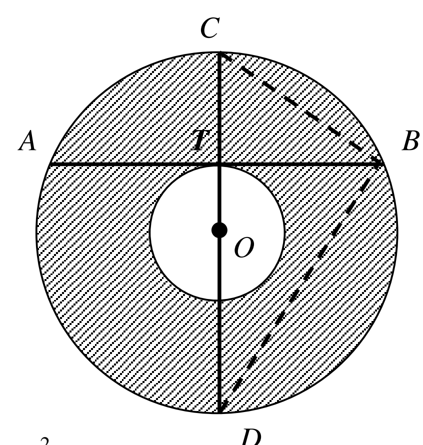


Rutin:

Misal jari-jari lingkaran besar = R, dan jari-jari lingkaran kecil = r.

Maka luas daerah yang berarsir = $\pi (R^2 - r^2)$

Untuk mendapatkan nilai $R^2 - r^2$ ini perlu analisis lebih lanjut. Umumnya kita membuat tambahan pemisalan pada gambar seperti berikut ini.



Dari gambar di samping, kita mengingat kembali sifat segitiga-segitiga sebangun, atau mengingat bahwa $TB^2 = CT \times TD$.

Dengan demikian, $4^2 = (R - r)(R + r) \Rightarrow 16 = R^2 - r^2$.

Sehingga, luas daerah yang berarsir = 16π.

Melihat kasus ekstrim:

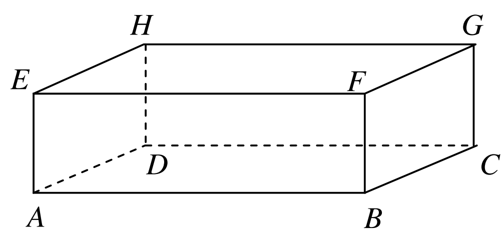
Oleh karena tidak dibatasi berapa jari-jari kedua lingkaran, misalkan lingkaran kecil kita pilih sangat kecil, atau katakanlah sebuah titik saja, maka tali busur AB akan menjadi diameter lingkaran besar sehingga luas daerah yang berarsir merupakan luas daerah lingkaran dengan diameter 8, yaitu 16π.

i. Gunakan titik pandang berbeda (*adopting a different point of view*)

Kita harus membiasakan diri melihat suatu masalah dalam cara pandang berbeda. Hal ini untuk menambah alternatif menggali ide penyelesaian suatu masalah.

Contoh.

Perhatikan gambar balok *ABCD.EFGH* dengan panjang, lebar dan tinggi yang berbeda. Jika seekor semut hendak bergerak dari titik B menuju titik H, maka berapa jarak terpendek yang dapat ditempuh si semut?

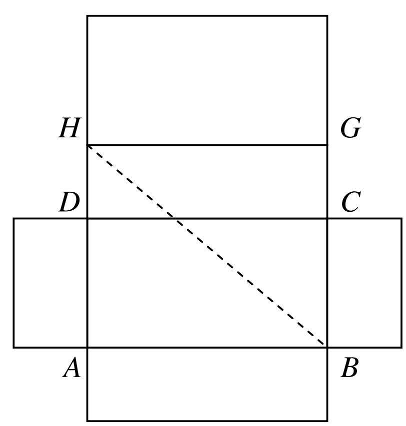


Rutin:

Barangkali tidak ada prosedur rutin yang dapat dicoba dengan mudah dalam kasus ini. Pemisalan secara aljabar dengan penggunaan differensial terasa sangat sulit untuk diterapkan.

Menggunakan cara pandang berbeda:

Oleh karena lintasan yang dilalui semut ada pada sisi balok, maka buka jaring-jaring balok, seperti pada gambar di samping ini.



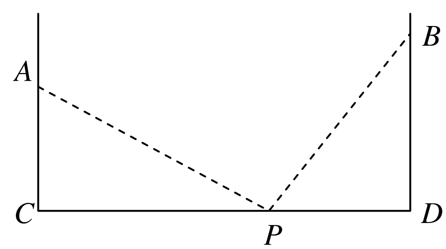
Dengan cara pandang ini, mudah dipahami bahwa jarak terpendek yang dapat dicapai semut adalah sepanjang garis lurus dari titik *B* ke titik *H*.

j. Gunakan sifat simetri atau pencerminan (*use a symmetry*)

Sifat simetri amat membantu kita menyelesaikan masalah, contohnya ketika ingin menghitung luas daerah tertutup antara kurva sebuah fungsi kuadrat dan sumbu x. Namun kita juga harus melihat sifat simetri ini pada masalah-masalah lain yang tidak menunjukkan kesimetrian pada pernyataan masalahnya. Kejelian kita dibutuhkan untuk melihat adakah kesimetrian pada masalah, dapatkah sifat simetri dimunculkan, dan lain-lain.

Contoh.

Perhatikan gambar di bawah. Dalam sebuah ruangan, Rudi ingin memasang tali untuk suatu acara dari titik A pada suatu dinding ke titik B pada dinding di hadapannya, namun harus melewati sebuah titik pada dinding penyiku yang menghubungkan kedua dinding. Di mana letak titik P agar panjang tali yang digunakan Rudi minimal? (misal $AC = 5$m, $BD = 8$m, dan $CD = 13$m).



Rutin:

Mungkin cara yang mula-mula terpikir secara tradisional adalah penggunaan kalkulus. Misalkan $AP = m$ dan $PB = n$. Lalu kita ingin menentukan panjang CP, maka misalkan $CP = x$, lalu $y = m + n$. Dengan menggunakan rumus Pythagoras, kita akan memperoleh:

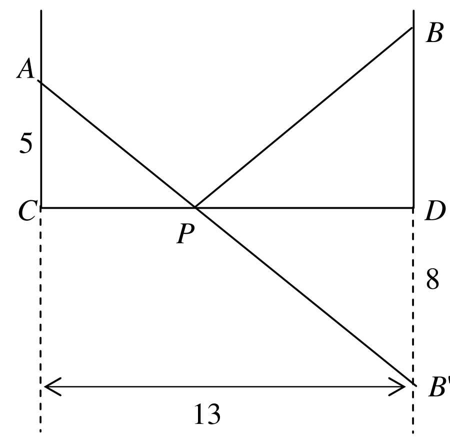
$$y = \left(5^2 + x^2\right)^{1/2} + \left(8^2 + (13 - x)^2\right)^{1/2}.$$

Lalu, kita harus mencari turunan pertama fungsi y, yaitu $\frac{dy}{dx}$. Kemudian, menemukan penyelesaian x untuk $\frac{dy}{dx} = 0$.

Menggunakan sifat simetri:

Bisakah kita menerapkan sifat simetri pada masalah di atas? Cobalah. Kita akan mendapatkan bahwa bila kita menggunakan sifat simetri pada garis CD, maka masalah tersebut selesai dengan cepat dan tuntas!

Perhatikan gambar di samping.



Jelas, jarak terpendek adalah garis lurus AB'.

Panjang AB' mudah dicari dengan rumus Pythagoras.

k. Buat persamaan (*make an equation*) atau buat notasi yang tepat (*use appropriate notation*)

Contoh.

Jika $2n + 1$ adalah bilangan kudrat sempurna dengan n bilangan bulat positif buktikan bahwa $n + 1$ adalah jumlah dua bilangan kuadrat sempurna yang berurutan.

Rutin:

Pemisalan $2n + 1 = K$ tidak ada manfaatnya.

Menggunakan notasi yang tepat:

Misalkan $2n + 1 = k^2$ dengan k sebuah bilangan bulat positif. Karena k^2 adalah sebuah bilangan ganjil, maka k juga bilangan ganjil. Sekarang misalkan $k = t + 1$ dengan t sebuah bilangan bulat positif. Maka $2n + 1 = (2t + 1)^2$. Dari persamaan terakhir ini kita peroleh:

$$n = \frac{(2t+1)^2 - 1}{2} = \frac{4t^2 + 4t}{2} = 2t^2 + 2t$$

sehingga,

$$n + 1 = 2t^2 + 2t + 1 = t^2 + (t + 1)^2 \quad \text{(terbukti)}.$$

l. Pecahkan masalah menjadi beberapa submasalah lalu menyelesaikannya (*devide into subproblems*)

Contoh.

Buktikan bahwa $|a+b| \leq |a|+|b|$

Rutin:

Biasanya cara rutin dimulai dengan menggunakan definisi nilai mutlak. Namun hal ini tidak akan sampai pada pembuktian yang memadai.

Memecah ke beberapa submasalah:

Masalah tersebut lebih mudah ditangani bila dipecah menjadi beberapa submasalah, dalam hal ini sesuai banyak kemungkinan nilai a dan b, sebagai berikut:

Bila $a = b = 0$ (jelas, tanda kesamaan berlaku).

Bila salah satu bernilai nol (jelas, tanda kesamaan berlaku).

$$|a+0| \leq |a|+|0| \iff |a| \leq |a|$$

Bila kedua-duanya positif (jelas, tanda kesamaan berlaku).

$$|a+b| \leq |a|+|b| \iff a+b \leq a+b$$

Bila kedua-duanya negatif (jelas, tanda kesamaan berlaku).

Misal $a = -p$ dan $b = -q$. Dengan p, q bernilai positif.

$$\begin{aligned} |a+b| \leq |a|+|b| &\iff |-p+-q| \leq |-p|+|-q| \\ &\iff |-(p+q)| \leq |p|+|q| \\ &\iff |p+q| \leq |p|+|q| \end{aligned}$$

Bila yang satu positif, lainnya negatif (jelas, tanda lebih kecil berlaku).

Misal, $a = -p$ dan $b = q$

$$\begin{aligned} |a+b| \leq |a|+|b| &\iff |-p+q| \leq |-p|+|q| \\ &\iff |q-p| \leq |p|+|q| \quad \text{, ingat } |-p| = |p| \\ &\iff |q-p| \leq |p|+|q| \end{aligned}$$

Oleh karena $|q-p| \leq |q+p|$ dan $|q+p| \leq |p|+|q|$ maka jelas, berlaku ketidaksamaan di atas.

m. Buat tabel atau bentuk daftar lain yang sistematis seperti diagram pohon, diagram alir, atau barisan (*make a table or an organized list*)

Contoh sederhana.

Sebuah kelompok terdiri dari 5 orang. Bila akan dipilih dua orang sebagai ketua dan sekretaris, ada berapa cara kemungkinan pilihan yang berbeda.

Rutin:

Biasanya siswa memulai dengan mencoba-coba memasangkan setiap dua orang yang berbeda. Namun cara tradisional ini tidaklah memadai untuk mendapatkan jawaban yang lengkap.

Menggunakan daftar yang sistematis:

Cara terbaik dengan menggunakan daftar yang sistematis, antara lain tabel atau pohon bercabang.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A		*AB*	*AC*	*AD*	*AE*
B	*BA*		*BC*	*BD*	*BE*
C	*CA*	*CB*		*CD*	*CE*
D	*DA*	*DB*	*DC*		*DE*
E	*EA*	*EB*	*EC*	*ED*	

n. Gunakan kontradiksi (*use contradiction*)

Contoh.

Buktikan bahwa bilangan prima ada tak hingga banyaknya.

Rutin:

Biasanya siswa tidak memiliki ide untuk menyelesaikan masalah ini. Tidak ada prosedur rutin yang mereka pelajari yang dapat membantu menyelesaikan masalah tersebut.

Menggunakan kontradiksi:

Andaikan saja ada berhingga banyaknya bilangan prima, katakanlah yang tertinggi adalah P. Sekarang dapatkah kita menyusun suatu kontradiksi dengan pengandaian ini.

Perhatikan, bahwa kita dapat mengalikan seluruh bilangan prima yang ada. Katakanlah hasil kalinya adalah K.

$$K = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times ... \times P$$

Tapi perhatikan bahwa $K + 1$ adalah sebuah bilangan prima, karena bilangan baru yang lebih besar dari P ini tidak dapat dibagi dengan bilangan prima yang lainnya. Dengan demikian tidak benar bahwa ada bilangan prima terbesar P. Karena itu jelas bahwa bilangan prima ada tak hingga banyaknya.

Selain yang telah dijelaskan di atas, masih banyak lagi strategi yang dapat digunakan misalnya: melakukan percobaan (*experimenting*) dan mempraktekkan masalah (*act out the problem*). Strategi lain yang sudah lebih mengarah ke prosedural antara lain: menggunakan deduksi atau rumus (*use deduction*), menggunakan induksi matematika, menggunakan *counterexample* (contoh menyimpang), menggunakan prinsip *without loss of generality*, menggunakan prinsip "sarang merpati" (*pigeonhole principle*), serta beberapa teknik pembuktian (*proving*) lainnya. Teknik-teknik dasar pembuktian yang sebagian dipelajari pada pokok bahasan Logika Matematika juga masih relevan untuk kita pahami sebagai bekal dalam pemecahan masalah.

Daftar Pustaka

Goldin, G. A. & McClintock, C. E. "*The theme symmetry in problem solving*" dalam Krulik, S. & Reys, R. E. (editor). 1980. *Problem solving in school mathematics*. New York: the National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Musser, G. L. "*Problem-solving strategies in school mathematics*" dalam Krulik, S. & Reys, R. E. (editor). 1980. *Problem solving in school mathematics*. New York: the National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Polya, G. 1945. *How To Solve It, a new aspect of mathematical method*. New Jersey: Princeton University Press.

Posamentier, A. S. & Stepelman, J. 1999. *Teaching Secondary School Mathematics, techniques & enrichment units*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Sumardyono, M.Pd. Kepala Unit Litbang atau R&D pada Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Matematika (PPPPTK Matematika). Kandidat Doktor Matematika dari UGM.